Université Joseph Fourier **MAT244 : Contrôle continu du 29 avril 2013**
L2 **Mathématiques**

Durée 1 heure 30
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1. On considère la forme quadratique hermitienne h donnée par

$$\forall z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4, \quad h(z) = |z_1|^2 + 3|z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1 + \bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_3 z_1 + \bar{z}_1 z_4 + \bar{z}_4 z_1 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_2 + \bar{z}_2 z_4 + \bar{z}_4 z_2 + 2\bar{z}_3 z_4 + 2\bar{z}_4 z_3.$$

i) Par la méthode de Gauss, obtenir une représentation de h sous forme de somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
ii) Donner l'expression de la forme polaire de h. Est-ce un produit scalaire complexe ?

Exercice 2. Soit $\mathscr{C}$ la conique définie par l'équation

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 32\sqrt{2}x - 32\sqrt{2}y + 56 = 0.$$

Donner le type de $\mathscr{C}$ et son équation réduite, puis la représenter dans le plan.

Exercice 3. Dans cet exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel, et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée.
i) On note E_1 le plan

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Donner une base orthonormée de E_1. On note P le point de coordonnées $(1, 0, 0)$ dans la base canonique. Existe-t-il un point Q de E_1 tel que $\|\vec{PQ}\|$ minimise la valeur $\|\vec{PR}\|$, lorsque R décrit E_1 ? Si oui, un tel Q est-il unique ? et que vaut $\|\vec{PQ}\|$?
ii) Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser A en base orthonormée, en donnant la matrice de passage associée (on pourra remarquer que E_1 est un sous-espace propre de A).