Université Joseph Fourier **MAT244 : Contrôle continu du 11 mars 2013**
L2 **Mathématiques**

Durée 2 heures
Documents et calculatrices non autorisés

Questions de cours

i) Soit E un espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. Rappeler l'identité du parallélogramme.

ii) Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, et $(a_1, \ldots, a_p)$ est une base orthogonale de F, rappeler la formule permettant de calculer la projection orthogonale $\pi_F(x)$ sur le sous-espace F en termes du produit scalaire.

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{K}^3$ muni de sa base canonique, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sauf dans la question v) où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{K}^3$ telle que

$$q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 7z^2 + 4xy + 2xz - 2yz$$

i) Donner la matrice A de q dans la base canonique.

ii) Expliciter l'expression définissant la forme bilinéaire symétrique associée $\varphi((x,y,z),(x',y',z'))$.

iii) En utilisant la méthode de Gauss, trouver une décomposition de q en carré de formes linéaires. Quelle est la signature de q ?

iv) Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, déduire de la question précédente une base orthogonale $\mathscr{B}$ pour φ, et expliciter la matrice de passage P et la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$. La forme bilinéaire φ peut-elle posséder une base orthonormée sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

v) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que l'on peut trouver une base orthonormée, c'est-à-dire une base dans laquelle la matrice de φ est la matrice unité.

Exercice 2. On se place sur l'espace $\mathbb{R}[X]_2$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 muni de la forme φ définie par

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} |x|\ P(x)\ Q(x)\ dx$$

i) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]_2$, et expliciter la matrice de φ dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ [on se ramènera à des calculs sur $[0,1]$ en tenant compte de la parité ou de l'imparité des fonctions.]

ii) Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ afin que $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, P_2) = (1\ ,\ X + a\ ,\ X^2 + bX + c)$ soit une base φ-orthogonale.

iii) En déduire une base φ-orthonormée.

Exercice 3. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ et on considère dans E la forme quadratique $q(u) = \ell_1(u)^2 - 4\ell_2(u)^2$ où $u = (x,y,z,t) \in E$ et où ℓ_1, ℓ_2 désignent les formes linéaires telles que

$$\ell_1(u) = x + y + z + t, \quad \ell_2(u) = y + t.$$

i) Écrire la matrice de q dans la base canonique de E.

ii) On utilise le changement de coordonnées $X = x + y + z + t$, $Y = y + t$, $Z = z$, $T = t$. Écrire l'expression de $q(u)$ et de la forme bilinéaire symétrique $(u,u') \mapsto \varphi(u,u')$ associée à q dans ces nouvelles coordonnées. Préciser le rang et la signature de φ.

iii) Déterminer le noyau de φ et le cône isotrope de q, dans les deux systèmes de coordonnées (X,Y,Z,T) et (x,y,z,t).

iv) Montrer que la droite $D = \mathbb{R}(1,1,1,1)$ est isotrope et que $H = D^\perp$ est un hyperplan de E. A-t-on $E = D \oplus D^\perp$?

v) Montrer que $H = D \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$ et déterminer $H^\perp$.