2012-2013 | L2 PGM-PHC-PHY-PMM-PCMint
DLST | MAT244

Examen du 13 mai 2013

pas de document, pas de calculatrice

durée : 2h

Exercice 1. Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note φ la forme bilinéaire et q la forme quadratique associées à A dans la base canonique.

1. Si on note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$, expliciter $\varphi(x, y)$ et $q(x)$.
2. Appliquer l'algorithme de Gauss pour effectuer une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires.
3. Donner le rang et la signature de q.
4. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. Donner la liste des valeurs propres de A. Trouver une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A.
5. Donner une nouvelle décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires.
6. Quelle est la nature de la quadrique $q(x) = 1$?

Exercice 2.

1. Définir les coefficients de Fourier $a_n(g)$, $b_n(g)$ et $c_n(g)$ d'une fonction g supposée 2π-périodique et continue par morceaux.

Soit f la fonction <u>2π-périodique</u> définie par

$$f(t) = \pi^2 - t^2,\ t \in [-\pi, \pi].$$

2. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
3. Calculer $c_0(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
4. Montrer, en énonçant les théorèmes auxquels vous faites référence, que f est égale à sa série de Fourier.
5. En déduire les valeurs de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

6. Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt$. Après avoir énoncé l'identité de Parseval-Bessel, calculer la valeur de
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 3. Donner la nature de la conique d'équation
$$4x^2 + 4y^2 + 12xy - 8x - 12y + 1 = 0.$$
Justifier votre réponse de façon précise.
Tracer la conique.