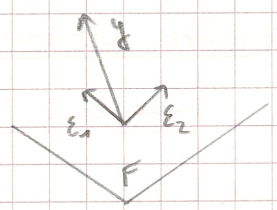
ici

$\varphi(\varepsilon_j, y)_{1 \leq j \leq p} = 0$ donc $\varphi(x,y) = 0 \quad \forall x \in F.$

Si $\varphi(x,y) = 0, \forall x \in F$ alors en prenant $x = \varepsilon_j \Rightarrow \varphi(\varepsilon_j, y) = 0.$



Définition : $\operatorname{Ker} \varphi = E^{\perp} = \{ y \in E, \ \forall x \in E. \ \varphi(x,y) = 0 \}$

$(e_1, \dots e_n)$ base de E.

$\varphi(x,y) = X^t C Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$C = \operatorname{Mat}_{(e_j)}(\varphi)$

$Y' = CY \qquad X^t Y' = x_1 y_1' + \dots + x_n y_n' = 0 \qquad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ssi $Y' = 0$ c à d $CY = 0$.

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ y$ de coordonnées Y tq $CY = 0 \}$, noyau de $Y \longmapsto CY$

$\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij} x_i y_j$ sur E

$= X^t C Y.$

$E^{\perp} = \operatorname{Ker} \varphi : \{ Y ; CY = 0 \}.$

Théorème du rang : $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \varphi = \dim_{\mathbb{K}} E - \operatorname{rang} \varphi.$

Définition : On dit que φ est dégénérée, si $\operatorname{Ker} \varphi \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \varphi > 0.$

$\Leftrightarrow r = \operatorname{rang} \varphi < \dim_{\mathbb{K}} E \Leftrightarrow \det C = 0.$

Si $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, on dit que φ est non dégénérée.

Définition : On appelle "vecteur isotrope" pour une forme quadratique q un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) = \varphi(x,y) = 0$, autrement dit $x \perp x$.

Remarque x isotrope $\Rightarrow$ λx isotrope

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Notation : Isotrope (q) = Isotrope (φ).

C'est un cône, c'est à dire un ensemble invariant par multiplication par un scalaire quelconque.

Exemple : dans $E = \mathbb{R}^2$

$q(x,y) = x^2 - y^2.$

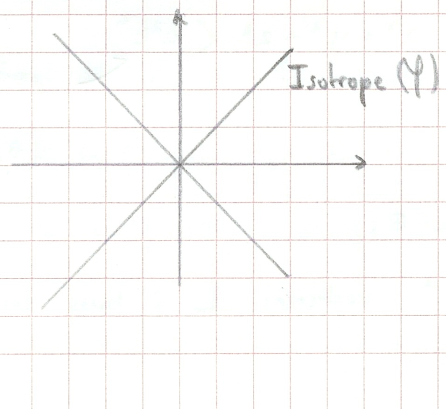
$\varphi((x,y),(x',y')) = xx' - yy'$

$e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

d'où $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = C.$

$\det C = -1 \Rightarrow \varphi$ non dégénéré $\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = \{(0,0)\}.$

Vecteurs isotropes : $q(x,y) = 0 \iff x^2 - y^2 = 0 \iff y = \pm x$



F s.e.v de $\mathbb{R}^2$	$\{(0,0)\}$	$D = \mathbb{R}(a,b)$ (droite)	$\mathbb{R}^2$
	dim 0	dim 1	dim 2.
$F^\perp$	$\mathbb{R}^2$		$\{(0,0)\}$

φ non dégénérée.

$$D^\perp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi((a,b),(x,y)) = 0\}.$$

D' : $ax - by = 0$.

D' droite de vecteur directeur (b,a).

<u>Remarque</u> : $D^\perp = D$ précisément lorsque (a,b) isotrope

<u>Forme quadratique de Lorentz</u> : Dans $E = \mathbb{R}^4$.

$$q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

$c > 0$ ("vitesse de la lumière").

Dans la base canonique : $\mathrm{Mat}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -c \end{pmatrix}$

$\det(q) = -c \neq 0 \Rightarrow \varphi$ non dégénérée, $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$.

<u>Vecteurs isotropes</u>. $\{x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2\}$.

Si t est fixé, c'est une sphère de rayon $ct \rightarrow$ "cône de la lumière"

$q(x,y,z,t) < 0 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < c^2 t^2$ ← points accessible depuis $(0,0,0,0)$ à vitesse $< c$.

$q(x,y,z,t) > 0$

<u>Propriété</u> : $\forall F$ s.e.v de E.

- $(F^\perp)^\perp \supset F$, $F^\perp$: vecteurs $\perp$ à tous les vecteurs de F.

donc les vecteurs de F sont orthogonaux aux vecteurs de $F^\perp$

donc on a bien $F \subset (F^\perp)^\perp$

<u>Exemple :</u> $E = \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z)$.

$q(x,y,z) = x^2 - y^2$

$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - yy'$.

$$\text{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

φ dégénérée. $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}e_3$.

$F = D = \mathbb{R}(1,0,0)$.

$D^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0\}$. est un plan de base $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

$(D^\perp)^\perp = \{(x,y,z) \perp e_2 \text{ et } \underbrace{e_3}_{\text{toujours } \perp \text{ à tout vecteur.}}\} = \{(x,y,z),\ -y = 0\}$

$(D^\perp)^\perp$ est le plan $P = \{(x,y,z),\ y = 0\}$.

donc $(D^\perp)^\perp \underset{\neq}{\supset} D$

<u>Théorème :</u> Si φ est non dégénérée sur l'espace E de dimension n, alors $\forall F$ s.e.v de E : $\dim_{\mathbb{K}} F^\perp = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} F$

<u>Lemme :</u> $l_1, l_2, \dots l_p \in E^*$ formes linéaires <u>indépendantes.</u>

$S = \{x \in E,\ l_1(x) = l_2(x) = \dots = l_p(x) = 0\}$.

$\dim_{\mathbb{K}} S = \dim_{\mathbb{K}} E - p$.

<u>dém</u> : On complète en une base $(\ell_1, \dots \ell_p, \ell_{p+1}, \dots \ell_n)$ de E^*.

$n = \dim_{\mathbb{K}} E^* = \dim_{\mathbb{K}} E$.

Changem^t de coordonnées

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \ell_1(x). \\ \vdots \\ \tilde{x}_n = \ell_n(x) \end{cases}$$

$\Updownarrow$ base.

$(\tilde{e}_1, \dots \tilde{e}_n)$, $P = L^{-1}$.

$S = \{x \in E, \tilde{x}_1 = \dots = \tilde{x}_p = 0\}$

base de S : $(\tilde{e}_{p+1}, \dots \tilde{e}_n)$, $\dim_{\mathbb{K}} S = n-p$

<u>dém. théorème</u> : Soit F s.e.v de E.

Soit $(a_1, a_2, \dots a_p)$ base de F.

$F = \{x \in E ; \varphi(x, a_j) = 0\}$.
$j = 1, p$

$\ell_j(x) = \varphi(x, a_j)$ forme linéaire

$\ell_1, \dots \ell_p$ indépendantes ?.

$\lambda_1 \ell_1(x) + \dots + \lambda_p \ell_p(x) = \varphi(x, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p)$.

ceci est la forme linéaire nulle (ceci $= 0$, $\forall x \in E$).

ssi $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p \in \operatorname{Ker} \varphi$.

<u>hypothèse</u> : $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\} \Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p = 0$.

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

donc $\dim_{\mathbb{K}} F^\perp = n - p = n - \dim_{\mathbb{K}} F$.

$\dim (F^\perp)^\perp = n - (\dim_{\mathbb{K}} F^\perp) = n - (n - \dim_{\mathbb{K}} F) = \dim_{\mathbb{K}} F$

or $(F^\perp)^\perp \supset F$, donc égalité.

Théorème : Si φ est non dégénérée, $\forall F$ s.e.v de E, $(F^{\perp})^{\perp} = F$
(c'est le cas du produit scalaire habituel).

Attention : même si φ non dégénérée, il n'est pas toujours vrai que $E = F \oplus F^{\perp}$.

Exemple : $q(x,y) = x^2 - y^2$
$F = D = \mathbb{R}(1,1)$.
$F^{\perp} = D$.

Pour que $F \oplus F^{\perp} = E$, il faut et suffit que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$
$\Rightarrow \dim(F + F^{\perp}) = \dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.

Définition : Soit E un e.v muni d'une F.B.S.
On dit qu'une base $(e_1, \dots e_n)$ de E est :

- orthogonale si $e_i \perp e_j$ pour $i \neq j$.
  $\Leftrightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0$.
  $\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots e_n)}(\varphi)$ diagonale
- orthonormée si de plus $q(e_j) = \varphi(e_j, e_j) = \pm 1$.
  $\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots e_n)}(\varphi) = I_n$ (matrice identité).

Méthode de Gauss $\rightsquigarrow$ base $\perp$.

si φ non dégénérée

sur $\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}$.

sur $\mathbb{C}$ I_n

II Formes quadratiques semi-positives.

On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition : On dit qu'une forme quadratique q (ou la FBS associée φ) est semi-positive sur l'espace E, si $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x,x) \geq 0$.

Semi-norme associée :

$$\|x\| = \sqrt{q(x)} = \sqrt{\varphi(x,x)} \in \mathbb{R}_+.$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = \sqrt{\lambda^2 q(x)} = |\lambda| \, \|x\|.$$

$$\text{Isotropes}(q) = \{x \in E \,/\, q(x) = 0\} = \{x \in E \,/\, \|x\| = 0\}.$$

Définition : On dit que q est définie, s'il n'y a pas de vecteur isotrope $x \neq 0$.

Exemple : ① Sur $\mathbb{R}^n$, $q(x) = x_1^2 + \dots x_n^2$

$x = (x_1, \dots x_n)$ est définie

② Sur $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = x^2 + (y+z)^2$

q est semi positive.

$\text{Isotropes}(q) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x=0,\ z+y=0\} = \mathbb{R}(0,1,-1)$

q est non définie.

③ sur $\mathbb{Q}^2$ $q(x,y) = x^2 - 2y^2$.

$q(x,y) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}\, y$. impossible avec $x, y \in \mathbb{Q}$ non nuls.

car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

forme non dégénérée, non positive, non négative et pourtant elle est définie.

④ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

définie $\Rightarrow$ non dégénérée ($\ker \varphi \subset \text{Isotrope}(\varphi)$).

si non dégénérée $\exists$ une base $\begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}$.

il y aura des vecteurs isotropes dès qu'il y a deux signes $\neq$.

sur $\mathbb{R}$, q définie $\Rightarrow$ soit $q > 0$, soit $q < 0$.

<u>définition</u> : q définie > 0, $\forall x \in E$, $x \neq 0$, $q(x) > 0$.
q définie < 0, $\forall x \in E$, $x \neq 0$, $q(x) < 0$.

Si q est définie > 0, on a une "vraie norme".
c'est à dire $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(sinon on parle de semi-norme).

<u>Définition</u> : On appelle <u>espace euclidien</u>, un espace E muni d'une forme quadratique q définie > 0, et de la FBS φ associée comme produit scalaire.