Examen du 23 mai 2012

pas de document, pas de calculatrice

durée : 2h

Exercice 1. Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note φ la forme bilinéaire et q la forme quadratique associées à A dans la base canonique.

1. Si on note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$, expliciter $\varphi(x, y)$ et $q(x)$.
2. Appliquer l'algorithme de Gauss pour effectuer une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires.
3. Donner le rang et la signature de q.
4. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. Trouver une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A. Donner la liste des valeurs propres de A.
5. Donner une nouvelle décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires.
6. Quelle est la nature de la quadrique $q(x) = 1$?

Exercice 2. 1. Définir les coefficients de Fourier $a_n(g)$, $b_n(g)$ et $c_n(g)$ de g une fonction 2π-périodique continue par morceaux.

2. On définit la fonction f par $f(t) = |\sin(t)|$.
   (a) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
   (c) Montrer, en énonçant les théorèmes auxquels vous faites référence, que f est égale à sa série de Fourier.
   (d) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.
   (e) Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt$. Après avoir énoncé l'identité de Parseval-Bessel, calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Par la suite on traitera AU CHOIX l'exercice 3 OU l'exercice 4.

Exercice 3. Donner la nature de la quadrique d'équation

$$4x^2 + 9y^2 + 12xy + z^2 + 5x - 7y + 1 = 0.$$

Justifier votre réponse de façon précise.

Exercice 4. Trouver, en utilisant les séries de Fourier, l'évolution de la température T dans un barreau métallique de longueur L, qu'on paramètre par x entre $-\frac{L}{2}$ et $\frac{L}{2}$, avec comme conditions initiales $T(x,0) = 0$ pour $|x| < \frac{L}{4}$ et $T(x,0) = 100$ pour $\frac{L}{4} < |x| < \frac{L}{2}$, sans flux de chaleur aux extrémités. L'équation de la chaleur associée, avec les conditions initiales, est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x}(-\frac{L}{2}, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\frac{L}{2}, t) = 0,$$

$$T(x,0) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| < \frac{L}{4}, \\ \\ 100 \text{ si } \frac{L}{4} < |x| < \frac{L}{2}. \end{cases}$$

On ne demande pas ici de justifier de certaines permutations telle que celle de la dérivation et du signe somme. Ce qui nous intéresse c'est que vous montriez que vous avez compris la démarche de Fourier et que vous savez calculer la solution sans forcément justifier tout les détails de la preuve.