Université Joseph Fourier Grenoble I — **Année 2011/2012**
DLST — **L2 PGM-PHC-PHY-PMM**

MAT244 : corrigé de l'examen (deuxième session, 13 juin 2012)

Question de cours. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace hermitien.

0.a) Rappeler la définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E en termes du produit scalaire hermitien.

Réponse. L'adjoint u^* est l'unique application $\mathbb{C}$-linéaire de E dans E telle que pour tous $x, y \in E$ on ait

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$

0.b) On suppose ici u symétrique. À partir de la définition du 0.a, donner la preuve du fait que

– Si $x \in E$ est un vecteur propre de u pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, alors celle-ci est nécessairement réelle.

– Des vecteurs propres x, y correspondant à des valeurs propres λ, μ distinctes sont nécessairement orthogonaux.

Réponse. Par définition l'endomorphisme u est symétrique si et seulement si $u^* = u$, c'est-à-dire d'après 0.a) si et seulement si pour tous $x, y \in E$ on a

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

– Si x est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $u(x) = \lambda x$ et en prenant $y = x$ dans l'égalité ci-dessus il vient

$$\langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle \implies \langle \lambda x, x\rangle = \langle x, \lambda x\rangle \implies \overline{\lambda}\langle x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$$

par sesquilinéarité. Comme $x \neq 0$, on a $\langle x, x\rangle \neq 0$ (strictement positif), donc $\overline{\lambda} = \lambda$ et par suite $\lambda \in \mathbb{R}$.

– Si x, y sont des vecteurs propres pour des valeurs propres respectives $\lambda \neq \mu$, on sait déjà que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ d'après ce qui précède. On obtient

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \implies \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \mu y\rangle \implies \overline{\lambda}\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle \implies (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0.$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit $\langle x, y\rangle = 0$, donc x, y sont orthogonaux.

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la forme bilinéaire symétrique φ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -5 \\ 5 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

et q la forme quadratique associée.

1.a) Soient $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Expliciter $\varphi(u, u')$ et $q(u)$.

Réponse. Par définition de la matrice d'une forme bilinéaire, on trouve

$$\varphi(u, u') = 2xx' + 2yy' - 7zz' + 4(xy' + yx') + 5(xz' + zx') - 5(yz' + zy'),$$
$$q(u) = \varphi(u, u) = 2x^2 + 2y^2 - 7z^2 + 8xy + 10xz - 10yz.$$

1.b) Déterminer l'orthogonal du vecteur $a = (0, 1, 1)$ pour la forme bilinéaire symétrique φ.

Réponse. L'orthogonal du vecteur $a = (0, 1, 1)$ pour la forme bilinéaire symétrique φ et par définition l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z)$ tels que

$$\varphi(u, a) = 0x + 2y - 7z + 4x + 5x - 5(y + z) = 0,$$

soit $9x - 3y - 12z = 0$, ou encore $3x - y - 4z = 0$. C'est un plan vectoriel.

1.c) À l'aide de la méthode de Gauss, déterminer une décomposition de $q(u)$ en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. Quels sont le rang et la signature de q ?

Réponse. Comme x^2 figure dans l'expression, la méthode de Gauss consiste d'abord à regrouper les termes en x et à les écrire comme le début d'un carré. On répète ensuite avec les variables restantes. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} q(u) &= 2(x^2+4xy+5xz)+2y^2-7z^2-10yz = 2\Big(x+2y+\frac{5}{2}z\Big)^2-2\Big(2y+\frac{5}{2}z\Big)^2+2y^2-7z^2-10yz \\ &= 2\Big(x+2y+\frac{5}{2}z\Big)^2-6y^2-\frac{39}{2}z^2-30yz = 2\Big(x+2y+\frac{5}{2}z\Big)^2-6(y^2+5yz)-\frac{39}{2}z^2 \\ &= 2\Big(x+2y+\frac{5}{2}z\Big)^2-6\Big(y+\frac{5}{2}z\Big)^2+\frac{150}{4}z^2-\frac{39}{2}z^2 = 2\Big(x+2y+\frac{5}{2}z\Big)^2-6\Big(y+\frac{5}{2}z\Big)^2+18z^2. \end{aligned}$$

On trouve donc $q(u)=2\ell_1(u)^2-6\ell_2(u)^2+18\ell_3(u)^2$ avec les 3 formes linéaires indépendantes

$$x'=\ell_1(u)=x+2y+\frac{5}{2}z, \qquad y'=\ell_2(u)=y+\frac{5}{2}z, \qquad z'=\ell_3(u)=z.$$

Il s'agit d'une forme quadratique de rang 3 et de signature $(2,1)$.

1.d) Expliciter une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ pour φ, déduite de la décomposition en carrés obtenue à la question précédente.

Réponse. Le changement de coordonnées réciproque de la transformation $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ est donné par

$$z=z', \qquad y=y'-\frac{5}{2}z', \qquad x=x'-2\Big(y'-\frac{5}{2}z'\Big)-\frac{5}{2}z'=x'-2y'+\frac{5}{2}z',$$

soit $X=PX'$ avec la matrice de passage

$$P=\begin{pmatrix}1 & -2 & \frac{5}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de cette matrice, à savoir les vecteurs $e'_1=(1,0,0)$, $e'_2=(-2,1,0)$, $e'_3=(\frac{5}{2},-\frac{5}{2},1)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base orthogonale pour q, et on a $q(u)=2x'^2-6y'^2+18z'^2$ dans les nouvelles coordonnées. La matrice de φ dans cette base est par conséquent

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 18\end{pmatrix} \qquad \text{(une vérification directe est possible via } A'=P^tAP).$$

1.e) Montrer que le vecteur $u_1=(1,1,0)$ est un vecteur propre de A pour une valeur propre λ_1 que l'on déterminera. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A, qui soit orthonormée relativement au produit scalaire euclidien usuel.

Réponse. Un calcul montre que le vecteur colonne $U_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vérifie $AU=\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}=6U$. Par conséquent le vecteur $u_1=(1,1,0)\in\mathbb{R}^3$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_1=6$. Nous trouvons

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 4 & 5\\ 4 & 2-\lambda & -5\\ 5 & -5 & -7-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6-\lambda & 4 & 5\\ 6-\lambda & 2-\lambda & -5\\ 0 & -5 & -7-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6-\lambda & 4 & 5\\ 0 & -2-\lambda & -10\\ 0 & -5 & -7-\lambda\end{vmatrix}$$

en ajoutant la deuxième colonne à la première, puis en retranchant la première ligne à la deuxième. Ceci donne

$$\det(A-\lambda I)=(6-\lambda)\big[(2+\lambda)(7+\lambda)-50\big]=(6-\lambda)\big[\lambda^2+9\lambda-36\big]=-(\lambda-6)(\lambda-3)(\lambda+12).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1=6$ (déjà trouvée), $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-12$, la trace $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-3$ est correcte, et la signature est bien $(2,1)$ comme on l'avait déjà trouvé en 1.c. Comme les valeurs propres sont de multiplicité 1, chacun des espaces propres est une droite (sous-espace de dimension 1), et on sait qu'elles doivent être orthogonales par rapport au produit scalaire euclidien usuel. Les systèmes linéaires $(A-\lambda I)X=0$ avec $\lambda=6,3,-12$ s'écrivent respectivement

$$\begin{cases}-4x+4y+5z=0\\ 4x-4y-5z=0\\ 5x-5y-13z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}-x+4y+5z=0\\ 4x-y-5z=0\\ 5x-5y-10z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}14x+4y+5z=0\\ 4x+14y-5z=0\\ 5x-5y+5z=0\end{cases}$$

et on trouve que les solutions en sont les droites vectorielles

$$\mathbb{R}U_1,\ U_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbb{R}U_2,\ U_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad \mathbb{R}U_3,\ U_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=U_1\wedge U_2$$

(vérification laissée au lecteur). On obtient ainsi la base orthonormée

$$e''_1:\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad e''_2:\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad e''_3:\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\ e''_3=e''_1\wedge e''_2.$$

Cette base est orthogonale pour φ, la matrice de φ étant

$$A''=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&-12\end{pmatrix}.$$

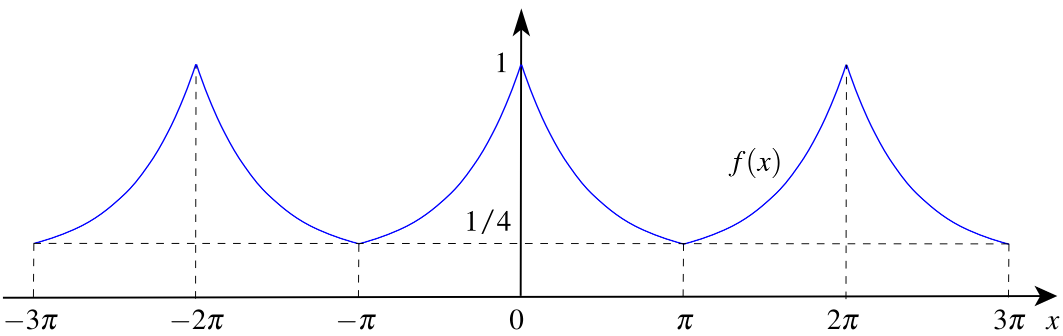
1.f) Déterminer la nature de la quadrique $Q=\{u\in\mathbb{R}^3\,;\,q(u)=-1\}$.
<u>*Réponse*</u>. Dans la base orthonormée (e''_1,e''_2,e''_3), la quadrique $Q=\{u\in\mathbb{R}^3\,;\,q(u)=-1\}$ s'écrit

$$6x''^2+3y''^2-12z''^2=-1.$$

Il s'agit d'un hyperboloïde (non de révolution, i.e. elliptique) à 2 nappes situées respectivement dans les demi-espaces $z''>0$ et $z''<0$:

$$\sqrt{12}\,z''=\pm\sqrt{6x''^2+3y''^2+1}.$$

Exercice 2. On considère la fonction f de période 2π telle que $f(x)=e^{\lambda|x|}$ sur $[-\pi,\pi]$, où $\lambda\in\mathbb{R}^*$.
2.a) Dessiner sommairement le graphe de la fonction pour $\lambda=-\ln 4/\pi\,(\simeq-0.44)$ sur l'intervalle $[-3\pi,3\pi]$.
<u>*Réponse*</u>. Pour $\lambda=-\ln 4/\pi\,(\simeq-0.44)$, on a $f(\pi)=f(-\pi)=e^{-\ln 4}=1/4$, on voit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Le graphe de f sur $[-3\pi,3\pi]$ a l'allure suivante



2.b) Calculer les coefficients de Fourier $a_0(f)=c_0(f)$, puis les coefficients $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$ (on pourra utiliser au choix des intégrations par parties ou les exponentielles complexes pour calculer l'intégrale, mais on demande le résultat sous forme réelle pour $a_n(f)$ et $b_n(f)$).
<u>*Réponse*</u>. Du fait de la parité de f, le coefficient de Fourier $a_0(f)$ est donné par

$$a_0(f)=c_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\lambda x}\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\Big]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{e^{\lambda\pi}-1}{\lambda}.$$

Pour $n \geq 1$, nous avons $b_n(f) = 0$ puisque f est paire, tandis que

$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda x}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda x}(e^{inx} + e^{-inx})\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{e^{(\lambda+in)x}}{\lambda+in} + \frac{e^{(\lambda-in)x}}{\lambda-in}\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda+in} + \frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda-in}\Big) = \frac{2\lambda}{\pi}\,\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2}.$$

Comme $e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx)$, le coefficient $c_n(f)$ est donné pour $n \geq 1$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2}\big(a_n(f) - ib_n(f)\big) = \frac{1}{2}a_n(f) = \frac{\lambda}{\pi}\,\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2},$$

et cette formule est en fait vraie aussi pour $n = 0$ et pour $n < 0$, car la parité de f entraîne $c_n(f) = c_{-n}(f)$. Alternativement, on aurait pu calculer $a_n(f)$ à l'aide de deux intégrations par parties successives :

$$I = \int_0^{\pi} e^{\lambda x}\cos(nx)\,dx = \Big[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\cos(nx)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}(-n\sin(nx))\,dx$$
$$= \frac{e^{\lambda x}\cos(n\pi)-1}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\int_0^{\pi} e^{\lambda x}\sin(nx)\,dx$$
$$= \frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\bigg(\Big[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\sin(nx)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}(n\cos(nx))\,dx\bigg)$$
$$= \frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda} - \frac{n^2}{\lambda^2}I.$$

En multipliant par λ^2 et en transposant I on en déduit

$$I = \frac{\lambda}{\lambda^2+n^2}\big((-1)^n e^{\lambda\pi}-1\big) \implies a_n(f) = \frac{2}{\pi}\,I = \frac{2\lambda}{\pi}\,\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2}.$$

2.c) Quelle est la somme de la série de Fourier de f ? On justifiera le résultat à l'aide de l'énoncé précis du théorème utilisé.

Réponse. Le théorème de Dirichlet stipule que la somme de la série entière d'une fonction de classe C^1 par morceaux est égale en tout point $x \in \mathbb{R}$ à la valeur principale $\mathrm{VP}(f)(x)$. Ici f est de classe C^∞ par morceaux et continue, donc $\mathrm{VP}(f) = f$. On en déduit ici que la somme de la série de Fourier est égale à $f(x)$ en tout point, soit

$$e^{\lambda x} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\,\cos(nx) = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{\lambda\pi}-1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\lambda}{\pi}\,\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2}\cos(nx), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.d) Déduire de ce qui précède la valeur de la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2}$$

Réponse. Pour $x = 0$, la formule du 2.c) donne en particulier

$$1 = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{\lambda\pi}-1}{\lambda} + \frac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2} = \frac{\pi}{2\lambda} - \frac{e^{\lambda\pi}-1}{2\lambda^2}.$$

2.e) Donner l'énoncé général de la formule de Parseval. Expliciter la valeur de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{((-1)^n e^{\lambda\pi}-1)^2}{(\lambda^2+n^2)^2}.$$

Réponse. La formule de Parseval dit que pour f dans L^2 (et donc en particulier pour f continue par morceaux) on a

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2).$$

On a ici

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2\lambda x}\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{e^{2\lambda x}}{2\lambda}\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{e^{2\lambda\pi}-1}{2\lambda},$$

ce qui entraîne l'égalité

$$\frac{1}{\pi}\frac{e^{2\lambda\pi}-1}{2\lambda} = \left(\frac{1}{\pi}\frac{e^{\lambda\pi}-1}{\lambda}\right)^2 + \frac{2\lambda^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{((-1)^n e^{\lambda\pi}-1)^2}{(\lambda^2+n^2)^2}.$$

On en déduit par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{((-1)^n e^{\lambda\pi}-1)^2}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi}{4\lambda^3}(e^{2\lambda\pi}-1) - \frac{1}{2\lambda^4}(e^{\lambda\pi}-1)^2.$$

2.f) Déterminer la projection orthogonale de la fonction f sur le sous-espace $\mathscr{P}_N$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N, et exprimer la distance de f à ce sous-espace, relativement à la norme L^2 $\|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,dx$.
Réponse. D'après le cours la projection orthogonale de la fonction f sur le sous-espace $\mathscr{P}_N$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N coïncide avec la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier, soit

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi}\frac{e^{\lambda\pi}-1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{N}\frac{2\lambda}{\pi}\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2}\cos(nx).$$

Le théorème de Pythagore et la formule de Parseval entraînent d'autre part

$$\|f-f_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f_N\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n(f)|^2 = \frac{2\lambda^2}{\pi^2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{((-1)^n e^{\lambda\pi}-1)^2}{(\lambda^2+n^2)^2}.$$

La distance de f au sous-espace $\mathscr{P}_N$ est la racine carrée de cette quantité, qui tend vers 0 quand $N\to+\infty$ (c'est le reste d'une série convergente).
2.g) (Question bonus) Un barreau métallique compris entre $x=0$ et $x=\pi$, a une température $\theta(x,0)=\theta_0\,e^{\lambda x}$ au temps $t=0$. On suppose que le transfert thermique avec l'atmosphère est négligeable. Si le coefficient de diffusivité thermique est D, expliciter la température $\theta(x,t)$ pour tout temps t.
Réponse. La longueur du barreau est ici $L=\pi$. D'après la solution de l'équation de la chaleur vue en cours, on sait que la température $\theta(x,t)$ au temps t est de la forme

$$\theta(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-(n^2\pi^2/L^2)Dt}.$$

Ici α_n est le coefficient de Fourier en cosinus de la fonction température au temps $t=0$, soit $\theta_0 e^{\lambda x}$, prolongée comme fonction paire sur $[-L,L]=[-\pi,\pi]$, et égale par conséquent à $\theta_0 f(x)$. D'après 2.b) on a

$$\alpha_0 = \theta_0\,a_0(f) = \frac{\theta_0}{\lambda\pi}(e^{\lambda\pi}-1), \qquad \alpha_n = \theta_0\,a_n(f) = \frac{2\theta_0\lambda}{\pi}\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2}, \qquad \forall n\geq 1.$$

Ceci implique

$$\theta(x,t) = \frac{\theta_0}{\lambda\pi}(e^{\lambda\pi}-1) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\theta_0\lambda}{\pi}\frac{(-1)^n e^{\lambda\pi}-1}{\lambda^2+n^2}\cos(nx)e^{-n^2Dt}.$$