Université Joseph Fourier Grenoble I — **Année 2011/2012**
DLST — **L2 PGM-PHC-PHY-PMM**

MAT244 : examen, deuxième session (13 juin 2012)

Durée 2h00 – documents et appareils électroniques interdits.
Il est demandé une rédaction précise et soignée.

Question de cours. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace hermitien.

0.a) Rappeler la définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E en termes du produit scalaire hermitien.

0.b) On suppose ici u symétrique. À partir de la définition du 0.a, donner la preuve du fait que
– Si $x \in E$ est un vecteur propre de u pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, alors celle-ci est nécessairement réelle.
– Des vecteurs propres x, y correspondant à des valeurs propres λ, μ distinctes sont nécessairement orthogonaux.

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la forme bilinéaire symétrique φ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -5 \\ 5 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

et q la forme quadratique associée.

1.a) Soient $u = (x,y,z)$ et $u' = (x',y',z')$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Expliciter $\varphi(u,u')$ et $q(u)$.

1.b) Déterminer l'orthogonal du vecteur $a = (0,1,1)$ pour la forme bilinéaire symétrique φ.

1.c) À l'aide de la méthode de Gauss, déterminer une décomposition de $q(u)$ en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. Quels sont le rang et la signature de q ?

1.d) Expliciter une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ pour φ, déduite de la décomposition en carrés obtenue à la question précédente.

1.e) Montrer que le vecteur $u_1 = (1,1,0)$ est un vecteur propre de A pour une valeur propre λ_1 que l'on déterminera. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A, qui soit orthonormée relativement au produit scalaire euclidien usuel.

1.f) Déterminer la nature de la quadrique $Q = \{u \in \mathbb{R}^3 ;\ q(u) = -1\}$.

Exercice 2. On considère la fonction f de période 2π telle que $f(x) = e^{\lambda|x|}$ sur $[-\pi,\pi]$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

2.a) Dessiner sommairement le graphe de la fonction pour $\lambda = -\ln 4/\pi\ (\simeq -0.44)$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

2.b) Calculer les coefficients de Fourier $a_0(f) = c_0(f)$, puis les coefficients $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$ (on pourra utiliser au choix des intégrations par parties ou les exponentielles complexes pour calculer l'intégrale, mais on demande le résultat sous forme réelle pour $a_n(f)$ et $b_n(f)$).

2.c) Quelle est la somme de la série de Fourier de f ? On justifiera le résultat à l'aide de l'énoncé précis du théorème utilisé.

2.d) Déduire de ce qui précède la valeur de la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{\lambda\pi} - 1}{\lambda^2 + n^2}$$

2.e) Donner l'énoncé général de la formule de Parseval. Expliciter la valeur de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n e^{\lambda\pi} - 1)^2}{(\lambda^2 + n^2)^2}.$$

2.f) Déterminer la projection orthogonale de la fonction f sur le sous-espace $\mathscr{P}_N$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N, et exprimer la distance de f à ce sous-espace, relativement à la norme L^2 $\|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx$.

2.g) (Question bonus) Un barreau métallique compris entre $x = 0$ et $x = \pi$, a une température $\theta(x,0) = \theta_0\, e^{\lambda x}$ au temps $t = 0$. On suppose que le transfert thermique avec l'atmosphère est négligeable. Si le coefficient de diffusivité thermique est D, expliciter la température $\theta(x,t)$ pour tout temps t.