Exercice 1. Pour chaque fonction $f(x,y)$ déterminer la forme quadratique $q_{x,y}(u,v)$ donnant dans la carte de coordonnées x,y le carré de l'élément de longueur sur le graphe $z=f(x,y)$.

1. $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}, f(x,y)=x+y$
2. $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}, f(x,y)=xy$
3. $f:\{(x,y)\in R^2; x^2+y^2\leq 1\}\mapsto\mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt{2-x^2-y^2}$
4. $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}, f(x,y)=x^2-2xy+y^2$
5. $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}, f(x,y)=y^3-3x^2y$

Pour chacun des exemples précédents esquisser le graphe de f et expliquer en quoi le dernier exemple s'approche de la carte du Y grenoblois donnée dans l'introduction du cours.

Exercice 2. La forme quadratique $q_{x,y}(u,v)=(1+y^2)u^2+2xyuv+(1+x^2)v^2$ exprime-t-elle le carré de l'élément de longueur sur le graphe d'une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$? Si oui la donner.
Même question pour la forme quadratique $q_{x,y}(u,v)=(1+y^2)u^2+4xyuv+(1+4x^2)v^2$.

Exercice 3. Montrer l'équivalence esquissée en cours entre le propriétés (1) et (3) ci-dessous caractérisant une famille $\mathcal{S}=(s_i)_{i\in I}$ libre de vecteurs $s_i\in E$ d'un espace vectoriel E :

(1) Si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires $\lambda_i\in\mathbb{K}$ telle que la combinaison linéaire $\sum_{i\in I}\lambda_i\cdot s_i=0$ est nulle alors la famille $(\lambda_i)_{i\in I}=0$ est nulle : pour tout indice $i\in I, \lambda_i=0$.

(3) aucun s_i des vecteurs de la famille n'est $s_i=\sum_{j\in I\setminus\{i\}}\lambda_j\cdot s_j$ combinaison linéaire des autres.

Donner et démontrer la caractérisation (2) que l'on n'a pas recopiée ici.

Exercice 4. Supposons, dans un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base (i,j,k), que l'on effectue le changement de coordonnées $\begin{cases} x'=2x-y+z\\ y'=-x+2y+4z\\ z'=-4x+y+z\end{cases}$ où (x,y,z) désignent les coordonnées dans la base (i,j,k). A quelle base correspondent ces nouvelles coordonnées ?

Exercice 5. même question que dans l'exercice précédent pour les changements de base :
$\begin{cases} x'=2x+2y+z\\ y'=x+2y+z\\ z'=\quad\quad y+z\end{cases}$ $\begin{cases} x''=2x+3y+2z\\ y''=x+3y+2z\\ z''=\quad\quad y+z\end{cases}$ $\begin{cases} x'''=4x+2y+z\\ y'''=3x+2y+z\\ z'''=x+y+z\end{cases}$

Exercice 6. a) Prouver que si deux matrices carrées $M,N\in M_n(\mathbb{R})$ sont inversibles alors leur produit $M\cdot N$ est inversible et $(M\cdot N)^{-1}=N^{-1}\cdot M^{-1}$.
b) Calculer les trois produits de matrice suivants :
$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
déduire de a) le fait que chacun est une matrice inversible et déterminer son inverse.
c) Utiliser ces résultats pour vérifier la correction des réponses données à l'**Exercice 5**.

Exercice 7. Auto-apprentissage En utilisant la méthode de l'exercice précédent fabriquer chaque jour par produit des matrices à coeficients entiers inversibles dont l'inverse est aussi à coefficients entiers et se calcule simplement par produit. Ecrire les systèmes correspondants, résoudre ces systèmes et vérifier la correction du résultat á l'aide de la matrice inverse.

Exercice 8. On considère l'espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de l'endomorphisme $D : E \to E, D(f) = f'$ de dérivation qui à chaque fonction $f \in E$ associe sa fonction dérivée.

b) Même question pour la restriction de D au sous-espace :

$$\mathcal{P} = \{f \in E\ ;\ \text{ il y a } P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)\}$$

invariant par dérivation formé des fonctions polynomiales.

Exercice 9. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme $f : E \to E$ d'un espace vectoriel complexe E et $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de vecteurs propres correspondants. [1]

En considérant une éventuelle relation linéaire $\sum_{\lambda\in\Lambda} z_\lambda \cdot e_\lambda = 0$ non triviale choisie de *longueur* $Card(\{\lambda \in \Lambda; z_\lambda \neq 0\})$ minimale, prouver que la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est libre.

Déduire de cet exercice et du précédent une autre solution de l'**Exercice 6** de la première feuille.

Exercice 10. a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de

$$m : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X],\ m(P) = X \cdot P$$

la multiplication par X dans l'espace vectoriel des polynômes.

b) Même question pour l'endomorphisme linéaire :

$$\mathcal{P} : C^0(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ \mathcal{P}(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

primitive s'annulant en 0 de l'espace vectoriel des fonctions rélles de continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel réel et une base $(e_i)_{i\in I}$ de E. On note $E_\mathbb{C} = E \times E$.

a) La famille $(e_i, e_j)_{(i,j)\in I\times I}$ est-elle génératrice dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E_\mathbb{C}$? Est-elle libre ?

b) Prouver que la loi externe $\mathbb{C} \times E_\mathbb{C} \to E_\mathbb{C}, (x + yi) \cdot (u, v) = (x \cdot u - y \cdot v, y \cdot u + x \cdot v)$ fait de $E_\mathbb{C}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ayant $E = E \times \{0\}$ comme sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

c) Prouver que $(e_i, 0)_{i\in I}$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_\mathbb{C}$.

d) Prouver que si $f : E \to E$ est un endomorphisme linéaire de E alors

$$f_\mathbb{C} : E_\mathbb{C} \to E_\mathbb{C},\ f_\mathbb{C}(u, v) = (f(u), f(v))$$

est l'unique endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $E_\mathbb{C} = E \times E$ respectant $E = E \times \{0\}$ et y induisant f.

e) Soit $(u, v) \in E_\mathbb{C}$ un vecteur propre de $f_\mathbb{C}$ associé à la valeur propre $\lambda = x + yi$. Prouver que :

e1) Le sous-espace $Vect(u, v)$ engendré par u et v est invariant par f.

e2) Si u et v sont linéairement dépendants alors la valeur propre $\lambda = x \in \mathbb{R}$ est réelle, sinon exprimer la matrice de la restriction $f_{|Vect(u,v)}$ dans la base (u, v) de $Vect(u, v)$.

Exercice 12. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E. Peut-on déduire de l'exercice précédent qu'il y a un sous espace $D \subset E$ tel que $f(D) \subset D$ et $dim_\mathbb{R}(D) \in \{1, 2\}$.

b) Peut-on le déduire si de plus l'epace E de dimension finie ?

c) Peut-on le déduire si de plus l'espace E est non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie ?

Exercice 13. Les notations sont celles de l'**Exercice 1** expliquer géométriquement [2] que, à u^2+v^2 fixé, $q_{x,y}(u, v)$ est minimum (resp. maximum) pour (u, v) colinéaire à $(-f'_y, f'_x)$ (resp. (f'_x, f'_y)).

1. *c. a d.* pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a $e_\lambda \in E\backslash\{0\}$ et $f(e_\lambda) = \lambda \cdot e_\lambda$.
2. On rappelle que si $t \mapsto c(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ est une courbe différentiable et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est différentiable la fonction $t \mapsto g(t) = f(c(t))$ est dérivable de dérivée $g'(t) = f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t)$.