Université Joseph Fourier Grenoble I **Année 2011/2012**

MAT244 : Contrôle continu du 20 avril 2012

Durée 2h00 – documents et appareils électroniques interdits

Il est demandé une rédaction précise et soignée – le barême dépassera largement 20 points, donc il n'est pas nécessaire de tout traiter pour atteindre la note maximale.

Question de cours. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace hermitien de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On rappelle qu'un endomorphisme unitaire est un endomorphisme u tel que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

1. Donner au moins 3 autres caractérisations équivalentes d'un endomorphisme unitaire u en termes des propriétés de u ou de sa matrice A (avec les hypothèses et notations appropriées).

2. Montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme unitaire sont de module 1.

Exercice 1.

1. Déterminer quel est le type géométrique de la conique $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - y + 1 = 0$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, et en donner l'équation réduite dans un repère orthonormé.
2. Préciser la nature de la quadrique $x^2 + 4xy + 4y^2 + z^2 - x - y + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. 1. Justifier sans calcul que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

2. Montrer que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.

3. Donner une base orthonormée (pour le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^3$) qui diagonalise A. Quelle est la signature de la forme quadratique de matrice A ?

Exercice 3. On se place sur l'espace $E = C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire φ défini par l'expression suivante :

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

1. On note $\mathbb{1}$ la fonction constante $x \mapsto 1$. Vérifier que le système de fonctions $\mathscr{B} = (\mathbb{1}, \cos, \sin)$ engendre un sous-espace vectoriel F de dimension 3 de E et que $\mathscr{B}$ en est une base orthogonale.
2. Donner une formule générale pour la projection orthogonale $\pi_F : E \to F$: on spécifiera l'expression de $\pi_F(f)$ pour une fonction $f \in E$ quelconque.
3. Trouver, en justifiant le résultat, un triplet (a_0, b_0, c_0) dans $\mathbb{R}^3$ qui minimise

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(x - a - b\cos x - c\sin x\Big)^2\, dx$$

et déterminer la valeur minimale de cette intégrale en utilisant le théorème de Pythagore.
4. Soit G l'espace vectoriel engendré par F et par la fonction identique $x \mapsto x$. Déterminer une base orthonormée de G.
5. Expliciter la matrice A de la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^4$ telle que

$$Q(a, b, c, d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(a + b\cos x + c\sin x + dx\Big)^2\, dx$$

et déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Q.