MAT244 - Année universitaire 2010-2011 Feuille d'exercices 1

On notera ici $\mathbb{R}[X]_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Exercice 1. Pour chaque espace vectoriel V, dire si la famille $F \subset V$ est une base de V. Lorsque c'est le cas, déterminer les coordonnées d'un vecteur donné de V par rapport à F.

1. $V = \mathbb{R}^3,\ F = \big((1,-1,-1),(1,0,1),(2,2,6)\big)$
2. $V = \mathbb{R}^3,\ F = \big((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big)$
3. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\},\ F = \big((1,-1,0),(1,0,-1)\big)$
4. $V = \mathbb{R}[X]_2,\ F = (X^2-3X+1, X^2+3X-4, 2X^2+2X-4)$
5. $V = \mathbb{R}[X]_2,\ F = ((X-1)^2,(X-1),1)$.

Exercice 2. Pour chaque espace vectoriel V, dire si la partie $S \subset V$ est un sous-espace vectoriel :

1. $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-z=0\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-z=1\}$
3. $V = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, $S = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) | f''+f'=0\}$
4. $V = \mathbb{R}[X]_3$, $S = \{P \in \mathbb{R}[X]_3 \mid (P(3))^2 = P(2).\}$.

Exercice 3. Pour quelles valeurs de k le système $\begin{cases} kx+y=1 \\ x+ky=1 \end{cases}$ admet-il :

a) aucune solution b) une solution unique c) une infinité de solutions ?

Exercice 4. Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices par rapport à la base canonique sont $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer le noyau et l'image de f et de g.

Exercice 5. Montrer que les trois fonctions $\cos(x-1)$, $\cos x$ et $\cos(x+1)$ forment une famille liée dans l'espace $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soient n réels distincts $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Montrer que les fonctions $e^{\alpha_i x}$, $i=1,\ldots,n$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit $V = \{P \in \mathbb{R}[X]_n \mid P(1)=0\}$.
Montrer que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Calculer la dimension de V et en préciser une base.

Exercice 8. Soit $E = C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions deux fois continuement dérivables.

1. On considère l'équation différentielle $y'+5y=0$. Montrer que l'ensemble S des fonctions de E solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.
2. On considère l'équation différentielle $y' = y^2+1$. L'ensemble Σ des fonctions de E solutions de cette équation est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 9. Nous considérons $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? En préciser une base.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_0,\ldots,P_n$ des polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $0 \leq i \leq n$, le degré de P_i est i. Démontrer que la famille $(P_i)_{i=0\ldots n}$ forme une base du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_n$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 11. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Les matrices suivantes sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Les diagonaliser.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$.

Exercice 14. Pour chaque application, indiquer si elle est linéaire. Si oui, en donner le noyau et l'image et, si cela a un sens, la matrice par rapport à des bases que l'on choisira.

1. La fonction $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par la première coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y, z) = (x + y, y - z, z + 1)$.
3. L'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $g(x, y, z) = (x + y, y - z, x + z)$.
4. La rotation $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'angle θ autour de l'origine.
5. Une symétrie $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans le plan par rapport à une droite affine D. (Traiter séparément le cas où la droite D passe par l'origine).
6. L'application ϕ qui envoie $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ dans lui-même donnée par $\phi(f) = f'$.
   Nous rappelons que $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ est l'espace de fonctions sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables à tous ordres.
7. L'application $\phi : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3$ donnée par $\phi(P) = P' - XP$.

Exercice 15. Soient $n + 1$ réels distincts $a_0, a_1, \dots, a_n$. Montrer que l'application

$$f : P \in \mathbb{R}[X]_n \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Qu'en est-il de l'application $g : P \in \mathbb{R}[X]_n \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)) \in \mathbb{R}^n$?

Exercice 16. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. La transposée d'une matrice carrée M est notée ${}^tM$.

Montrer que $\mathcal{A}_n = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$ et $\mathcal{S}_n = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$ sont des sous-espaces vectoriels et calculer leur dimension (difficile).

Montrer que l'on a $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.

Exercice 17. Soit $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{P}$ le sous-ensemble des fonctions paires, et $\mathcal{I}$ le sous-ensemble des fonctions impaires.

Montrer que $V = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 18. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$. Trouver un supplémentaire W de V dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un sous-espace W tel que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Exercice 19. Soit V un K-espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $p : V \to V$ une application linéaire vérifiant $p \circ p = p$. Montrer que l'on a $V = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im(p)} = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_V - p)$.

Exercice 20. Trouver un exemple d'application linéaire $f : V \to V$ telle que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne soient pas en somme directe.