MAT 244 (Université Joseph Fourier)
Examen du 27/05/10 (Durée : 2h)
Calculatrice et documents interdits

Exercice 1.

Soit s un réel et soit q_s la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q_s(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + sx_3^2$$

On note $b_s(x, y)$ la forme polaire de q_s.

1) Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, expliciter $b_s(x, y)$.

2) Réduire par la méthode de Gauss q_s en carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

3) En déduire la signature de q_s suivant les valeurs de s, puis le rang de q_s. Pour quelles valeurs de s, b_s définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$? Pour quelles valeurs de s, la forme q_s est-elle non dégénérée ?

ON SUPPOSE MAINTENANT QUE $s = 0$.

4) Donner une base orthogonale pour la forme bilinéaire $b_0(x, y)$ (en utilisant la question 2).

5) On considère $e_0 = (1, 1, 0)$, $e_1 = (0, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 0, 1)$. Démontrer que (e_0, e_1, e_2) forme une base de $\mathbb{R}^3$. Donner l'expression de b_0 dans cette base.

Exercice 2.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1a) Soit $P \in E$ tel que $\displaystyle\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$. On pose $h(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)^2 dt$. Démontrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $h(x) = 0$. En déduire que P est le polynôme nul.

1b) On pose si P, $Q \in E$, $b(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Vérifier que b est une forme bilinéaire symétrique sur E, puis définit un produit scalaire sur E (On pourra utiliser ce qui précède).

2) Soit F le sous-espace de E formé des polynômes de degré au plus 2. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note e_j le polynôme qui à x associe $e_j(x) = x^j$. On notera par abus de

language b la restriction de b à F.
2a) Donner la matrice de b dans la base $(e_0,\, e_1,\, e_2)$ de F. Quel est le rang de cette matrice ?
2b) Construire une base orthonormée (pour b) de F à partir de e_0, e_1 et e_2.
2c) Donner la projection orthogonale de e_3 sur F.
2d) En déduire l'expression de l'unique polynôme $P_0 \in F$ tel que pour tout $P \in F$,

$$\int_0^1 (P_0(x) - e_3(x))^2 dx \leq \int_0^1 (P(x) - e_3(x))^2 dx$$

(A justifier avec soin).
3) Soit H l'ensemble des polynômes P de F tels que $P'(0) = 0$.
3a) Démontrer que H est un espace vectoriel de dimension 2 dont on déterminera une base.
3b) Quelle est la dimension de l'orthogonal de H pour b (Préciser avec soin le résultat de cours utilisé) ? Déterminer l'orthogonal de H.

Exercice 3.

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contiuue par morceaux, 2π-périodique. Donner la définition des coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$. Donner (en les démontrant) l'expression des $a_n(f)$ et $b_n(f)$ $(n \in \mathbb{N})$ en fonction des $c_n(f)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, impaire telle que

$$f(t) = t \text{ si } 0 \leq t < \pi/2 \text{ et } f(t) = \pi - t \text{ si } \pi/2 \leq t \leq \pi.$$

2a) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2b) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de f.
2c) Démontrer que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2} \sin((2p+1)t)$$

(On énoncera avec soin les résultats du cours utilisés). En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

2d) Calculer $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$. Rappeler la relation entre ce nombre et les $a_n(f)$, $b_n(f)$ (Identité de Parseval). En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.