Courants résiduels et classe fondamentale

Jean-Pierre Demailly[⋆]

[⋆] *Université de Grenoble I*
Institut Fourier, BP 74
U.R.A. 188 du C.N.R.S.
F-38402 Saint-Martin d'Hères

Mikael Passare[⋆⋆]

[⋆⋆] *Kungliga tekniska högskolan*
Matematiska institutionen
S-10044 Stockholm
Suède

1. Introduction

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ et soit Y le diviseur des zéros de f. La formule classique de Poincaré-Lelong dit que le courant d'intégration $[Y]$ sur Y peut s'écrire $(2\pi i)^{-1}\overline{\partial}\partial\log|f|^2$. Pour une application $f{:}\,U\to\mathbb{C}^p$ telle que les zéros Y_j des composantes f_j sont en position générale, on obtient un produit des courants d'intégration

$$\overline{\partial}\partial\log|f_1|^2\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}\partial\log|f_p|^2 = 2\pi i\,[Y_1]\wedge\ldots\wedge 2\pi i\,[Y_p] = (2\pi i)^p[Y]$$

où [Y] désigne le courant correspondant à l'intersection $Y_1\cap\ldots\cap Y_p$. Il est bien connu que le courant intersection du membre de gauche se factorise en deux parties : un facteur jacobien $\omega_Y = df_1\wedge\ldots\wedge df_p$ et un facteur $R_Y=\overline{\partial}(1/f_1)\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}(1/f_p)$, appelé courant résiduel (voir [CH78], p. 52).

Dans cette Note nous montrerons comment cette factorisation peut être étendue au cas global où Y est l'espace complexe associé à un idéal cohérent $\mathcal{I}$ sur une variété complexe X, sous l'hypothèse où $\mathcal{I}$ est *localement intersection complète*. Le fait que la forme jacobienne ne se réalise pas en général comme une section d'un fibré sur X tout entier nécessite une étude des faisceaux sur Y même, et conduit à la notion de cohomologie à support dans le voisinage infinitésimal d'ordre 1 de Y. Ici la cohomologie modérée employée dans [Ra76] et [DS85] (voir aussi [RR74]) ne conviendrait pas, puisqu'elle n'est pas indépendante du choix du prolongement à X d'un faisceau donné seulement sur Y. Notre résultat principal (Théorème 3.5) est le suivant : le courant résiduel R_Y peut s'identifier de manière intrinsèque à un élément canonique de la cohomologie infinitésimale d'ordre 1 à support dans Y et à valeurs dans le faisceau des sections du déterminant du fibré conormal à Y. Le point essentiel est la loi de transformation

$$\overline{\partial}\frac{1}{f_1'}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}\frac{1}{f_p'} = \big(\det(g_{ij})\big)^{-1}\,\overline{\partial}\frac{1}{f_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}\frac{1}{f_p}$$

lorsque $(f_i') = (g_{ij})(f_j)$ avec une matrice inversible (g_{ij}).

On sait en fait d'après le calcul de courants méromorphes développé dans [Pa88] que le courant résiduel $\overline{\partial}(1/f_1)\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}(1/f_p)$ est bien défini même lorsque les diviseurs Y_j des f_j ne sont plus en situation d'intersection complète. Il serait très intéressant de savoir si la classe de cohomologie de ce courant peut encore se voir comme une classe de cohomologie à support définie de manière intrinsèque sur une certaine sous-variété de l'intersection des Y_j. On peut penser par exemple au cas où les f_j seraient les composantes d'une section globale arbitraire f d'un fibré vectoriel holomorphe sur X. Malheureusement, la loi de transformation associée à un changement linéaire $(f'_i) = (g_{ij})(f_j)$ est dans ce cas difficile à expliciter et à interpréter, car elle doit nécessairement prendre en compte certaines dérivées (en nombre fini) de $\det(g_{ij})$. Il en résulte que la signification cohomologique du courant résidu reste assez mystérieuse dans le cas où l'on n'a pas une intersection complète.

Une grande partie de ce travail a été faite pendant un séjour du deuxième auteur à l'Institut Fourier au printemps 1992.

2. Théorie des résidus: formalisme algébrique

Nous rappelons ici le formalisme général des résidus introduit par Grothendieck (voir [Ha66]). Soit X une variété analytique complexe de dimension n, $\mathcal{O}$ son faisceau structural et $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux cohérent sur X. Nous supposons que la variété des zéros $Y = V(\mathcal{I})$ est de *dimension pure* $n-p$ et que le faisceau $\mathcal{I}$ est *localement intersection complète*, c'est à dire que tout point $x \in Y$ admet un voisinage U sur lequel $\mathcal{I}$ est engendré par exactement p fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p \in \Gamma(U, \mathcal{O})$. La suite $f = (f_1, \ldots, f_p)$ forme alors une suite régulière au voisinage de x, et le faisceau quotient $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ admet sur U une résolution libre de longueur p donnée par le complexe de Koszul

$$(2.1) \qquad 0 \to \Lambda^p \mathcal{G}^\star \to \Lambda^{p-1}\mathcal{G}^\star \to \cdots \to \Lambda^1 \mathcal{G}^\star \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathcal{I} \to 0,$$

où $\mathcal{G} = \mathcal{O}^{\oplus p}$ et où la différentielle du complexe $\Lambda^\bullet \mathcal{G}^\star$ est le morphisme de contraction $f \lrcorner \bullet$, $f \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ (voir par exemple [GH78], p. 687-695).

2.a. Définition du fibré normal à Y.

Nous considérons Y comme l'espace complexe non nécessairement réduit dont le faisceau structural est $\mathcal{O}_Y = (\mathcal{O}/\mathcal{I})_{|Y}$. Le faisceau $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est alors un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang p (une base locale est donnée par les images des générateurs $f_1, \ldots, f_p$). Ce faisceau peut être considéré comme le faisceau $\mathcal{N}_Y^\star$ des sections du fibré conormal $N_Y^\star$. Le fibré N_Y peut aussi être défini comme suit : si (U_α) est un recouvrement de Y par des ouverts de Stein tels que $\mathcal{I}$ soit engendré par $f_\alpha = (f_{\alpha,1}, \ldots, f_{\alpha,p})$ au dessus de U_α, il existe une matrice holomorphe $g_{\alpha\beta}$ telle que $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$ et on voit que la matrice $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}$ doit annuler f_γ sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Ses lignes sont donc dans l'image de la flèche $\Lambda^2 \mathcal{G}^\star \to \Lambda^1 \mathcal{G}^\star$ du complexe de Koszul, en particulier les composantes sont dans $\mathcal{I}$. Il en résulte que $(g_{\alpha\beta}) \bmod \mathcal{I}$ définit un cocycle de matrices holomorphes inversibles à coefficients dans $\mathcal{O}_Y$: on définit N_Y comme le fibré vectoriel sur Y défini par ce cocycle. Bien entendu, si le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ est engendré globalement par les composantes d'une section f d'un fibré vectoriel holomorphe E de rang p sur X, alors on a $N_Y = E_{\restriction Y}$ et le complexe de Koszul (2.1) existe globalement sur X avec $\mathcal{G} = \mathcal{O}(E)$. On notera cependant qu'en général N_Y ne s'étend pas nécessairement en un fibré vectoriel défini sur X tout entier (voir [OSS80], p. 93).

2.b. Construction du résidu de Grothendieck associé à l'idéal $\mathcal{I}$.

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}$-module localement libre sur X. Par définition, les foncteurs $\mathcal{E}xt^q$ sont les foncteurs dérivés du foncteur faisceau d'homomorphismes $\mathcal{H}om(\bullet, \bullet)$ et se calculent en prenant au choix une résolution projective du premier argument ou une résolution injective du deuxième. Les faisceaux $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \mathcal{F})$ peuvent donc être calculés localement au moyen du complexe de Koszul de $\mathcal{O}/\mathcal{I}$: ce sont les faisceaux de cohomologie du complexe $\mathcal{H}om(\Lambda^\bullet \mathcal{G}^\star, \mathcal{F}) = \Lambda^\bullet \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}$ dont la différentielle est simplement l'opérateur de multiplication extérieure $f \wedge \bullet$. Ce complexe s'identifie lui-même par dualité à un complexe de Koszul, en écrivant $\Lambda^k \mathcal{G} \simeq \Lambda^{p-k} \mathcal{G}^\star \otimes \det \mathcal{G}$; on en déduit aussitôt

$$\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \mathcal{F}) = 0 \ \text{ pour } \ q \neq p, \qquad \mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \mathcal{F}) \simeq \det \mathcal{G} \otimes \mathcal{F} \otimes (\mathcal{O}/\mathcal{I}).$$

Compte tenu du fait que $\mathcal{G}_{|Y}$ trivialise localement $\mathcal{N}_Y$, on a un isomorphisme canonique global

$$\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \mathcal{F}) \simeq j_\star(\det \mathcal{N}_Y \otimes \mathcal{F}_{\restriction Y}), \tag{2.2}$$

où $j : Y \to X$ est l'inclusion et $\mathcal{F}_{\restriction Y} = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}/\mathcal{I})_{|Y}$ la restriction "schématique" de $\mathcal{F}$ à Y. On voit en particulier que le résultat dépend uniquement de cette restriction. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau localement libre défini seulement sur Y (i.e. localement libre sur $\mathcal{O}_Y$) on peut définir des faisceaux de cohomologie à support dans le voisinage infinitésimal d'ordre 1 de Y par

$$\mathcal{H}^q_{\langle Y \rangle}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \widetilde{\mathcal{F}}), \tag{2.3}$$

en choisissant n'importe quelle extension localement libre $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ au voisinage de Y. D'après ce qui précède, on obtient

$$\mathcal{H}^q_{\langle Y \rangle}(\mathcal{F}) = 0 \ \text{ pour } \ q \neq p, \qquad \mathcal{H}^p_{\langle Y \rangle}(\mathcal{F}) \simeq j_\star(\det \mathcal{N}_Y \otimes \mathcal{F}). \tag{2.4}$$

Passons maintenant au niveau des Ext et des groupes de cohomologie globaux sur X (rappelons que les Ext sont les foncteurs dérivés du foncteur composé $\mathrm{Hom} = \Gamma \circ \mathcal{H}om$, à savoir les groupes de cohomologie issus de $R\Gamma \circ R\mathcal{H}om$ opérant sur la catégorie dérivée des faisceaux). Or, on a dans la catégorie dérivée des faisceaux un objet canonique $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \mathcal{F})$ indépendant du choix de l'extension locale $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$, de sorte qu'en appliquant le foncteur $R\Gamma$ on obtient aussi des groupes globaux

$$H^q_{\langle Y \rangle}(X, \mathcal{F}) := \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \mathcal{F}),$$

que nous appellerons groupes de cohomologie à *support infinitésimal d'ordre 1.* Puisqu'il y a un seul degré $q = p$ en lequel le faisceau $\mathcal{E}xt^q$ est non nul, la suite spectrale des Ext dégénère en E_2 et on a donc un isomorphisme

$$H^q_{\langle Y \rangle}(X, \mathcal{F}) \simeq H^{q-p}\big(X, \mathcal{H}^p_{\langle Y \rangle}(\mathcal{F})\big),$$

en particulier
$$H^p_{\langle Y\rangle}(X,\mathcal{F})\simeq\Gamma\big(X,\mathcal{H}^p_{\langle Y\rangle}(\mathcal{F})\big).$$

2.5. Remarque. — Cette cohomologie à support ne doit pas être confondue avec la cohomologie à support usuelle $\mathcal{H}^q_Y(\mathcal{F})$ (dérivée du foncteur Γ_Y des sections à support dans Y, et qui est définie pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur X tout entier), ni avec la cohomologie à support modérée
$$\mathcal{H}^q_{[Y]}(\mathcal{F}):=\operatorname*{ind\,lim}_{k\to+\infty}\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}/\mathcal{I}^k,\mathcal{F})$$
associée elle aussi à un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X tout entier (voir Ramis [Ra76]). En général, on a seulement des flèches
$$\mathcal{H}^q_{\langle Y\rangle}(\mathcal{F})\longrightarrow\mathcal{H}^q_{[Y]}(\mathcal{F})\longrightarrow\mathcal{H}^q_Y(\mathcal{F}),$$
$\mathcal{H}^q_{[Y]}(\mathcal{F})$ étant en quelque sorte la partie de $\mathcal{H}^q_Y(\mathcal{F})$ annulée localement par une puissance de $\mathcal{I}$, et $\mathcal{H}^q_{\langle Y\rangle}(\mathcal{F})$ la partie de $\mathcal{H}^q_Y(\mathcal{F})$ annulée par $\mathcal{I}$. En fait, nous allons considérer ici des faisceaux $\mathcal{F}$ qui sont seulement définis sur Y ; ceci nous interdit a priori de considérer d'autres groupes de cohomologie à support que $\mathcal{H}^q_{\langle Y\rangle}(\mathcal{F})$. □

Si on choisit en particulier comme faisceau $\mathcal{F}$ le faisceau inversible $\mathcal{F}=\det\mathcal{N}^\star_Y$, le second isomorphisme (2.4) définit une section canonique σ_Y de $H^p_{\langle Y\rangle}(X,\det\mathcal{N}^\star_Y)$ correspondant à la section constante unité de $\det\mathcal{N}_Y\otimes\mathcal{F}=\mathcal{O}_Y$. Cette section peut être considérée comme le résidu de Grothendieck associé à l'idéal $\mathcal{I}$. Ce résidu est intrinsèque, c'est-à-dire indépendant du choix des générateurs locaux $f_{\alpha,1},\ \ldots\ ,f_{\alpha,p}$ de l'idéal $\mathcal{I}$.

2.c. Relation avec la classe fondamentale de Y dans X.

La relation $f_\alpha=g_{\alpha\beta}$ donne par dérivation $df_\alpha=g_{\alpha\beta}(df_\beta)+(dg_{\alpha\beta})f_\beta$, d'où
$$df_{\alpha,1}\wedge\ldots\wedge df_{\alpha,p}=\det(g_{\alpha\beta})\,df_{\beta,1}\wedge\ldots\wedge df_{\beta,p}\mod \mathcal{I}\otimes\Omega^p_X.$$
Il en résulte que la collection des formes différentielles $df_{\alpha,1}\wedge\ldots\wedge df_{\alpha,p}$ définit une section canonique
$$\omega_Y\in H^0(Y,\Omega^p_{X\restriction Y}\otimes\det\mathcal{N}_Y).\tag{2.6}$$
Par $\mathcal{O}_Y$-linéarité, on obtient un produit
$$\mathcal{H}^p_{\langle Y\rangle}(\det\mathcal{N}^\star_Y)\otimes j_\star(\Omega^p_{X\restriction Y}\otimes\det\mathcal{N}_Y)\longrightarrow\mathcal{H}^p_{\langle Y\rangle}(\Omega^p_{X\restriction Y}):=\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}/\mathcal{I},\Omega^p_X).\tag{2.7}$$
Ceci donne un cup produit "extraordinaire"
$$H^p_{\langle Y\rangle}(X,\det\mathcal{N}^\star_Y)\times H^0(Y,\Omega^p_{X\restriction Y}\otimes\det\mathcal{N}_Y)\longrightarrow H^p_{\langle Y\rangle}(X,\Omega^p_X).\tag{2.8}$$
Compte tenu de la contravariance des $\mathcal{E}xt$ en le premier argument, la projection canonique $\mathcal{O}\to\mathcal{O}/\mathcal{I}$ jointe à l'isomorphisme évident $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(\mathcal{O},\Omega^p_X)=H^q(X,\Omega^p_X)$ induit un morphisme oubli du support
$$H^q_{\langle Y\rangle}(X,\Omega^p_X)\longrightarrow H^q(X,\Omega^p_X).\tag{2.9}$$

La section σ_Y définie plus haut est un élément canonique de $H^p_{\langle Y\rangle}(X, \det \mathcal{N}^\star_Y)$ et son cup produit par ω_Y donne un élément $\sigma_Y \cdot \omega_Y$ de $H^p_{\langle Y\rangle}(X, \Omega^p_X)$ qu'on va pouvoir interpréter comme la classe fondamentale de Y dans X. L'objet de ce qui suit est de préciser cette interprétation en faisant usage de la théorie des courants, et en particulier des courants résiduels.

3. Interprétation au moyen d'un complexe de courants

Comme on va le voir, il est très commode d'utiliser le formalisme des courants pour interpréter les groupes de cohomologie introduits au paragraphe 2. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}$-module localement libre sur X, et si ${}'\mathcal{D}^{0,\bullet}$ désigne le complexe des courants de bidegré $(0,q)$ sur X avec la différentielle $\overline{\partial}$, alors $\mathcal{F} \otimes {}'\mathcal{D}^{0,\bullet}$ est une résolution fine de $\mathcal{F}$ (isomorphisme de Dolbeault). Le complexe de faisceaux $R\mathcal{H}om(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \mathcal{F})$ est représenté localement dans la catégorie dérivée par le complexe simple associé au complexe double $\mathcal{H}om(\Lambda^\bullet \mathcal{G}^\star, \mathcal{F} \otimes {}'\mathcal{D}^{0,\bullet})$. Comme pour tout ouvert U l'espace des distributions $\Gamma(U, \mathcal{D}')$ est un $\Gamma(U, \mathcal{O})$-module injectif ([Ma66], chap. VII, 2.4 et 2.5), on a exactitude du bifoncteur $\mathcal{H}om$ par rapport au premier argument dans ce complexe double, ce qui montre que $R\mathcal{H}om(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \mathcal{F})$ s'identifie au complexe simple

$$\mathcal{H}om(\mathcal{O}/\mathcal{I}, \mathcal{F} \otimes {}'\mathcal{D}^{0,\bullet}) = \mathcal{F} \otimes {}'\mathcal{D}^{0,\bullet}_{\langle Y\rangle},$$

où ${}'\mathcal{D}^{0,\bullet}_{\langle Y\rangle}$ désigne le faisceau des courants annulés par l'idéal $\mathcal{I}$ (ce sont donc des courants à support dans Y, comportant suffisamment peu de dérivations transverses pour être annulés par les générateurs $f_1, \ldots, f_p$). Comme ce dernier complexe est un complexe de $\mathcal{C}^\infty$-modules, le complexe de ses sections globales calcule directement les Ext globaux. Par ailleurs, il est clair que le complexe $\mathcal{F} \otimes {}'\mathcal{D}^{0,\bullet}_{\langle Y\rangle}$ ne dépend que de la restriction de $\mathcal{F}$ à Y, de sorte que les notations ci-dessus ont encore un sens lorsque $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre défini seulement sur Y. On obtient alors des isomorphismes

$$\mathcal{H}^q_{\langle Y\rangle}(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}^q(\mathcal{F} \otimes {}'\mathcal{D}^{0,\bullet}_{\langle Y\rangle}), \qquad H^q_{\langle Y\rangle}(X, \mathcal{F}) \simeq H^q\big(\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes {}'\mathcal{D}^{0,\bullet}_{\langle Y\rangle})\big). \tag{3.1}$$

Introduisons maintenant les courants résiduels associés à notre idéal $\mathcal{I}$, et commençons par une situation locale. Etant donné les fonctions $f_1, \ldots, f_p \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ et une forme test $\varphi \in \mathcal{D}^{n,n-p}(U)$, nous considérons la limite

$$\overline{\partial}\frac{1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\frac{1}{f_p}\,(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{T_\varepsilon} \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_p}, \tag{3.2}$$

où le tube analytique réel $T_\varepsilon = \{|f_1| = \varepsilon_1, \ldots, |f_p| = \varepsilon_p\}$ est orienté par la forme volume $d\,(\arg f_1) \wedge \ldots \wedge d\,(\arg f_p) \geq 0$. Pourvu que le p-uplet ε tende vers zéro d'une manière convenable (voir [CH78] ou [Pa88] pour les détails), cette limite existe et définit l'action d'un courant $\overline{\partial}$-fermé $\overline{\partial}(1/f_1) \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}(1/f_p)$ dans ${}'\mathcal{D}^{0,p}(U)$. Puisque ce courant résiduel est annulé par les f_j (voir [CH78], Th. 1.7.6), il appartient en fait à l'espace ${}'\mathcal{D}^{0,p}_{\langle Y\rangle}(U)$. Sur les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$, la loi de transformation

$$\overline{\partial}\frac{1}{f_{\alpha,1}} \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\frac{1}{f_{\alpha,p}} = \big(\det(g_{\alpha\beta})\big)^{-1}\,\overline{\partial}\frac{1}{f_{\beta,1}} \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\frac{1}{f_{\beta,p}}, \tag{3.3}$$

dont une preuve précise se trouve dans [DS92], est valable. Par conséquent, la collection des courants $\overline{\partial}(1/f_{\alpha,1})\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}(1/f_{\alpha,p})$ définit un courant résidu global

$$R_Y\in\Gamma(X,\det\mathcal{N}_Y^\star\otimes{}'\mathcal{D}^{0,p}_{\langle Y\rangle}).$$

Plus généralement, si f_0 est une fonction holomorphe sur U, on sait définir un courant

$$\frac{1}{f_0}\overline{\partial}\frac{1}{f_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}\frac{1}{f_p}\,(\varphi):=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\varphi}{f_0f_1\cdots f_p},\tag{3.4}$$

où l'intégrale est calculée sur la couronne cylindrique

$$C_\varepsilon=\{|f_0|>\varepsilon_0,\,|f_1|=\varepsilon_1,\ldots,|f_p|=\varepsilon_p\}.$$

Ce courant est annulé par $f_1,\ldots,f_p$, son produit par f_0 redonne le courant (3.2), et on a la formule usuelle

$$\overline{\partial}\Big(\frac{1}{f_0}\overline{\partial}\frac{1}{f_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}\frac{1}{f_p}\Big)=\overline{\partial}\frac{1}{f_0}\wedge\overline{\partial}\frac{1}{f_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}\frac{1}{f_p}$$

(voir [CH78], Th. 1.7.7).

3.5. Théorème. — *Par l'isomorphisme (3.1) correspondant à $\mathcal{F}=\det\mathcal{N}_Y^\star$, soit*

$$H^p_{\langle Y\rangle}(X,\det\mathcal{N}_Y^\star)\simeq H^p\big(\Gamma(X,\det\mathcal{N}_Y^\star\otimes{}'\mathcal{D}^{0,\bullet}_{\langle Y\rangle})\big),$$

la section σ_Y construite au § 2 s'identifie au signe près à la classe de cohomologie du courant résidu R_Y.

Preuve. — En utilisant le complexe de Koszul (2.1), le fibré normal $\mathcal{N}_Y$ s'identifie localement à $\mathcal{G}_{\restriction Y}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}=(\det\mathcal{G})^{-1}$ est une extension locale de $\mathcal{F}=\det\mathcal{N}_Y^\star$. On a donc

$$\begin{aligned}R\mathcal{H}om(\mathcal{O}/\mathcal{I},\widetilde{\mathcal{F}})&=\mathcal{H}om(\mathcal{O}/\mathcal{I},\widetilde{\mathcal{F}}\otimes{}'\mathcal{D}^{0,\bullet})=\mathcal{H}om(\Lambda^\bullet\mathcal{G}^\star,\widetilde{\mathcal{F}}\otimes{}'\mathcal{D}^{0,\bullet})\\&=\Lambda^\bullet\mathcal{G}\otimes\widetilde{\mathcal{F}}\otimes{}'\mathcal{D}^{0,\bullet}=\Lambda^{p-\bullet}\mathcal{G}^\star\otimes{}'\mathcal{D}^{0,\bullet}.\end{aligned}$$

Ceci signifie que $R\mathcal{H}om(\mathcal{O}/\mathcal{I},\widetilde{\mathcal{F}})$ est quasi-isomorphe au complexe simple associé au complexe double $K^{i,j}=\Lambda^{p-i}\mathcal{G}^\star\otimes{}'\mathcal{D}^{0,j}$, produit tensoriel du complexe de Koszul (inversé et décalé) par le complexe de Dolbeault. Désignons par $(e_I)_{|I|=k}$ la base canonique de $\Lambda^k\mathcal{G}$. La première différentielle de $K^{\bullet,\bullet}$ est la contraction par le vecteur $f=\sum f_ke_k$ et la deuxième différentielle est $(-1)^i\overline{\partial}$. Par définition, σ_Y est l'image de 1 vu comme cocycle de $K^{p,0}$, tandis que R_Y s'identifie au cocycle $(e_1^\star\wedge\ldots\wedge e_p^\star)\otimes\big(\overline{\partial}(1/f_1)\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}(1/f_p)\big)$ de $K^{0,p}$. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de vérifier que $\sigma_Y\pm R_Y$ est un cobord dans $K^{\bullet,\bullet}$. Pour cela, on définit une cochaîne $u\in K^{p-1,0}\oplus\ldots\oplus K^{p-k,k-1}\oplus\ldots\oplus K^{0,p-1}$ par

$$u=e_1^\star\otimes\frac{1}{f_1}+\sum_{2\le k\le p}(-1)^{(p-k/2)(k-1)}\,(e_1^\star\wedge\ldots\wedge e_k^\star)\otimes\Big(\frac{1}{f_k}\overline{\partial}\frac{1}{f_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}\frac{1}{f_{k-1}}\Big).$$

Un calcul élémentaire montre alors que

$$(d'+d'')u=f\,\lrcorner\,u+(-1)^\bullet\overline{\partial}u=\sigma_Y-(-1)^{p(p+1)/2}R_Y.\qquad\square$$

Revenant pour un instant à la théorie locale, nous rappelons la structure du résidu logarithmique (voir [CH78], p. 52), à savoir

$$\overline{\partial}\frac{1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\frac{1}{f_p} \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_p = (2\pi i)^p \, [Y]_{|U}, \tag{3.6}$$

où le produit extérieur à gauche doit être compris au sens des courants, et où $[Y]$ désigne le courant d'intégration sur Y, prenant en compte les multiplicités. Ce dernier courant est défini sur X tout entier et représente un élément, appelé classe fondamentale de Y dans X, du groupe $H^{2p}_{DR}(X)$ de cohomologie de de Rham.

D'après (3.6) nous avons la relation globale $R_Y \wedge \omega_Y = (2\pi i)^p[Y]$, et il s'ensuit que le produit $\sigma_Y \cdot \omega_Y$ correspond, via l'isomorphisme (2.8) et l'isomorphisme de Dolbeault $H^p(X, \Omega^p_X) \simeq H^{p,p}_{\overline{\partial}}(X) \subset H^{2p}_{DR}(X)$ à la classe fondamentale de Y multipliée par $(2\pi i)^p$. Nous pouvons visualiser ces propriétés par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\sigma_Y \arrow[r, phantom, "\in"] \arrow[d, mapsto] & H^p_{\langle Y\rangle}(X, \det \mathcal{N}^\star_Y) \arrow[r, "\cdot\,\omega_Y"] \arrow[d, "\simeq"'] & H^p_{\langle Y\rangle}(X, \Omega^p_X) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & H^p(X, \Omega^p_X) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\{R_Y\} \arrow[r, phantom, "\in"] & H^p\big(\Gamma(X, \det \mathcal{N}^\star_Y \otimes {}'\mathcal{D}^{0,\bullet}_{\langle Y\rangle})\big) \arrow[r, "\wedge\,\omega_Y"] & H^p\big(\Gamma(X, {}'\mathcal{D}^{p,\bullet}_{\langle Y\rangle})\big) \arrow[r] & H^{p,p}_{\overline{\partial}}(X) \\
R_Y \arrow[rrr, mapsto] & & & (2\pi i)^p[Y].
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

Bibliographie

[CH78] N. Coleff & M. Herrera. — *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 633*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[DS85] A. Dickenstein & C. Sessa. — *Canonical representatives in moderate cohomology*, Invent. Math., **80** (1985), 417-434.

[DS92] A. Dickenstein & C. Sessa. — *Résidus de formes méromorphes et cohomologie modérée*, manuscrit, (1992), à paraître dans les Proceedings du Colloque de Géométrie Analytique, Paris, 29 juin-3 juillet 1992.

[GH78] Ph. Griffiths & J. Harris. — *Principles of algebraic geometry, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto, 1978.

[Ha66] R. Hartshorne. — *Residues and duality*, Lecture Notes in Math., Vol. 20, Springer-Verlag, Heidelberg, 1966.

[Ma66] B. Malgrange. — *Ideals of differentiable functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1966.

[OSS80] Ch. Okonek, M. Schneider & H. Spindler. — *Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Mathematics, Vol. 3*, Birkhäuser Boston-Basel-Stuttgart, 1980.

[Pa88] M. Passare. — *A calculus for meromorphic currents*, J. Reine Angew. Math., **392** (1988), 37-56.

[Ra76] J.-P. Ramis. — *Géométrie analytique et géométrie algébrique (variations sur le thème "G.A.G.A")*, Sém. P. Lelong-H. Skoda (Analyse), 1976/77, Lecture Notes in Math., Vol. 694, Springer-Verlag, Heidelberg, 1978, 228-289.

[RR74] J.-P. Ramis & G. Ruget. — *Résidus et dualité*, Invent. Math., **26** (1974), 89-131.

(2 février 1993)