**Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°5, 21/02/2019**

**1.** *Faisceaux tangents et cotangents*
Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété holomorphe de dimension complexe $n$. Rappelons qu'on appelle faisceau tangent $\mathcal{T}_X$ le $\mathcal{O}_X$-module des $\mathbb{C}$-dérivations de $\mathcal{O}_X$, et faisceau cotangent son dual $\mathcal{T}_X^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_X, \mathcal{O}_X)$. Si $f \in \mathcal{O}_X(U)$, on appelle différentielle de $f$, notée $df$, l'élément de $\mathcal{T}_X^*(U)$ tel que que $(df)_{|V}(\xi) = \xi \cdot f_{|V}$ pour tout champ de vecteurs $\xi \in \mathcal{T}_X V)$ avec $V \subset U$.

(a) Si $\tau : U \to \Omega \subset \mathbb{C}^n$, $x \mapsto z = (z_1, \ldots, z_n)$ est une carte holomorphe, on sait que la restriction $\mathcal{T}_{X|U}$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre de base $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n})$. Montrer que la base duale dans $\mathcal{T}^*_{X|U}$ est précisément $(dz_1, \ldots, dz_n)$.

(b) Soit $\tilde\tau : \widetilde{U} \to \widetilde{\Omega}$ une autre carte, et

$$h = \tilde\tau \circ \tau^{-1} : z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto w = (w_1, \ldots z_n) = h(z_1, \ldots, z_n)$$

l'application de changement de cartes, définie sur l'ouvert $\tau(U \cap \widetilde{U}) \subset \Omega$, et dont les composantes seront notées $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Dans le cas $n = 1$, expliciter $dw$ en fonction de $h'(z)$ et $dz$, et $\frac{d}{dw}$ en fonction de $\frac{d}{dz}$. Plus généralement, pour $n$ quelconque, exprimer $dw_i$ en fonction des $dz_j$ (resp. $\frac{\partial}{\partial z_j}$ en fonction des $\frac{\partial}{\partial w_i}$) et des dérivées partielles de $h$.

**2.** Soit $X = E_{a,b} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ une courbe elliptique. Montrer que $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_X^*$ sont globalement libres, avec $\frac{d}{dz}$ et $dz$ comme bases globales sur le faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$. En déduire que les espaces de sections globales $V = \mathcal{T}_X(X)$ et $W = \mathcal{T}_X^*(X)$ sont des espaces vectoriels complexes de dimension 1, duaux l'un de l'autre.

**3.** Les espaces $\mathcal{T}_X(X)$ et $\mathcal{T}_X^*(X)$ décrits ci-dessus étant des invariants fondamentaux d'une surface de Riemann, on se pose ici le problème de calculer ces espaces lorsque $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la sphère de Riemann.

(a) Montrer qu'un champ de vecteurs $\xi(z) = f(z)\frac{d}{dz}$ sur $\mathbb{C}$ se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe à l'infini si et seulement si $\frac{f(z)}{z^2}$ est holomorphe à l'infini. En déduire que $V = \mathcal{T}_X(X)$ est un espace vectoriel de dimension complexe 3 que l'on précisera.

(b) Montrer qu'une forme différentielle $\alpha(z) = g(z)\,dz$ sur $\mathbb{C}$ se prolonge en une forme difféentielle holomorphe à l'infini si et seulement si $g(z)z^2$ est holomorphe à l'infini, ce qui implique en particulier que $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. En déduire quel est l'espace $W = \mathcal{T}_X^*(X)$ (et observer que ce n'est pas le dual de $V$ !).

**4.** *Théorème de finitude*
Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une surface de Riemann *compacte* et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre sur $X$. On choisit un recouvrement fini $(U_k)$ de $X$ par des ouverts tels que $\mathcal{F}_{|U_k} \simeq \mathcal{O}_{X|U_k}^{\oplus r}$ soit libre, et pour $f \in \mathcal{F}(V)$ avec $V \subset U_k$, on note $f_k = (f_{k,i})_{1\le i\le r} \in \mathcal{O}_X(V)^{\oplus r}$ le $r$-uplet qui lui correspond dans l'isomorphisme précédent, considéré comme matrice colonne à $r$ lignes de fonctions holomorphes.

(a) Montrer (c'est presque par définition...) qu'il existe une matrice $a_{k\ell}$ inversible $r \times r$ de fonctions holomorphes sur $U_k \cap U_\ell$, telle que $f_k = a_{k\ell} f_\ell$ pour tout $f \in \mathcal{F}(X)$, et qu'on a la relation $a_{km} = a_{k\ell}a_{\ell m}$ sur $U_k \cap U_\ell \cap U_m$ pour tous indices $k, \ell, m$.

(b) On fixe des recouvrements ouverts finis $U''_k \subset U'_k \subset U_k$ tels que $\overline{U}''_k \subset U'_k$ et $\overline{U}'_k \subset U_k$ (on observera que $\overline{U}'_k$ et $\overline{U}''_k$ sont des parties compactes de $X$). Montrer que la norme

$$\|f\|' = \max_k \max_{1\le i\le r} \sup_{z\in\overline{U}'_k} |f_{k,i}(z)|$$

munit $\mathcal{F}(X)$ d'une structure d'espace de Banach complexe, et que si on définit de même une norme $\|f\|''$ à partir des ouverts $U''_k$, on obtient une norme équivalente.

(c) Montrer à l'aide du théorème de Montel que pour toute suite $f_\nu \in \mathcal{F}(X)$ dont les normes vérifient $\|f_\nu\|' \le C = \text{Const}$, il existe une sous-suite qui converge pour la norme $\|\ \ \|''$. En déduire que la boule unité fermée de $\mathcal{F}(X)$ est compacte et que $\mathcal{F}(X)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.