Magistère M1 **Université Grenoble Alpes** **année 2018-2019**

Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°4, 14/02/2019

1. *Propriétés universelles du produit tensoriel*
Soit A un anneau commutatif et M, N des A-modules. On considère les applications A-bilinéaires $\varphi : M \times N \to E$ dans un A-module E. On dit qu'une telle application A-bilinéaire $\varphi_U : M \times N \to U$ est universelle si pour tout $\varphi : M \times N \to E$ il existe un unique morphisme A-linéaire $\psi : U \to E$ tel que $\psi \circ \varphi_U = \varphi$.

(a) Montrer qu'un tel A-module universel U est unique à isomorphisme près.

(b) Montrer que l'application $M \times N \to M \otimes_A N$ est universelle et en déduire l'existence et l'unicité du A-module universel.

(c) Si $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$ sont A-linéaires, montrer à l'aide de ce qui précède qu'on peut construire un morphisme naturel A-linéaire, noté $f \otimes_A g$, de $M \otimes_A N$ dans $M' \otimes_A N'$.

2. *Complexifié d'un espace vectoriel réel*
Si E est un espace vectoriel réel, on pose $E^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E$.

(a) Montrer que $E^{\mathbb{C}}$ possède une structure naturelle d'espace vectoriel complexe obtenue en posant $\lambda \cdot (\alpha \otimes_{\mathbb{R}} v) = (\lambda\alpha) \otimes_{\mathbb{R}} v$ pour tous $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ et $v \in E$, puis que $1 \otimes_{\mathbb{R}} E$ et $i \otimes_{\mathbb{R}} E$ sont des sous-espaces vectoriels réels de $E^{\mathbb{C}}$ isomorphes à E, et enfin que $E^{\mathbb{C}} = (1 \otimes_{\mathbb{R}} E) \oplus (i \otimes_{\mathbb{R}} E)$. Quelle est la dimension réelle de $E^{\mathbb{C}}$?

(b) Plus généralement si $L \supset K$ est une extension d'un corps K, montrer que tout K-espace vectoriel E s'étend de manière naturelle en un L-espace vectoriel $E^L = L \otimes_K E$, que $\dim_L E^L = \dim_K E$ et $\dim_K E^L = [L : K] \times \dim_K E$.

3. Montrer que dans l'anneau $A = \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n}(U)$ (resp. $A = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$) les dérivations $\mathbb{R}$-linéaires (resp. $\mathbb{C}$-linéaires) commutant aux restrictions d'ouverts sont celles que l'on attend [et que l'on n'a donc pas besoin de l'hypothèse de continuité].