Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), feuille n°3, 19/03/2018

1. (*Notions élémentaires sur les espaces projectifs*) Soit $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.

(a) On appelle sous-espace projectif de $P(V)$ tout espace projectif $P(S)$ où S est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de V (avec la convention $P(S) = \emptyset$ si $S = \{0\}$). Montrer que toute intersection de sous-espaces projectifs est un sous-espace projectif (éventuellement vide).

(b) Montrer qu'un système de $p+1$ points $([a_j])_{0\le j\le p}$ tel que $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ forme un système libre détermine un unique sous-espace $P(S)$ de dimension p qui contient les $[a_j]$: on l'appelle le sous-espace projectif engendré par les $[a_j]$; en particulier, deux points distincts $[a]$, $[b]$ déterminent une unique droite projective.

(c) Si $\dim P(V) = 2$ (i.e. $\dim V = 3$), montrer que deux droites projectives distinctes de $P(V)$ s'intersectent toujours en un unique point de $P(V)$. Lorsque $V = \mathbb{K}^3$, montrer que (relativement à la carte affine standard U_0) toute droite projective distincte de la droite à l'infini D_0 de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ intersecte $U_0 \simeq \mathbb{K}^2$ suivant une droite affine, et qu'inversement tout droite affine de $\mathbb{K}^2$ se complète en une droite projective en ajoutant un point à l'infini. Montrer que deux droites affines distinctes D, D' de $\mathbb{K}^2$ sont parallèles si et seulement si leur point d'intersection appartient à la droite à l'infini D_0.

(d) Un système de $n+2$ points $([a_0], \ldots, [a_{n+1}])$ est appelé *repère projectif* si $(n+1)$ quelconques de ces $n+2$ points ne sont pas contenus dans un hyperplan projectif de $P(V)$; montrer que c'est le cas si et seulement si $n+1$ points quelconques correspondent à une base $(a_0, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_{n+1})$ de V, ou encore, si et seulement si on peut choisir des représentants a'_j tels que $(a'_0, \ldots, a'_n)$ est une base de V et $a'_{n+1} = a'_0 + a'_1 + \ldots + a'_n$.

(e) On suppose donnés deux espaces vectoriels V, W de dimension $n+1$. Montrer que tout isomorphisme projectif $[u] : P(V) \to P(W)$ transforme un repère projectif de V en un repère projectif de W. Inversement, étant donné des repères projectifs $([e_j])$ de V, $([\varepsilon_j])$ de W, $0 \le j \le n+1$ "normalisés" de sorte que $e_{n+1} = e_0 + \ldots + e_n$ et $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_n$, montrer qu'il existe un unique isomorphisme projectif $[u] : P(V) \to P(W)$ tels que $[u(e_j)] = [\varepsilon_j]$ pour $0 \le j \le n+1$.

(f) Montrer qu'un repère projectif de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ n'est pas autre chose qu'un triplet (a, b, c) de points deux à deux distincts. Si (e_0, e_1) est la base canonique de $\mathbb{K}^2$, montrer que le triplet $([e_0], [e_1], [e_0 + e_1])$ s'identifie à $(\infty, 0, 1)$ dans la carte $U_1 \simeq \mathbb{K}$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ (dont la coordonnée non homogène est $\zeta = z_0/z_1$). En déduire qu'il existe une unique homographie $h_{a,b,c}$ qui envoie un triplet (a, b, c) de points 2 à 2 distincts de $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ sur le triplet $(\infty, 0, 1)$ et expliciter $z \mapsto h_{a,b,c}(z)$ (pour éviter les calculs fastidieux, on observera que $z = a$ est un pôle et $z = b$ un zéro de $h_{a,b,c}$, il faut seulement ajuster l'image du point c pour obtenir 1).

(g) Étant donné 4 points a, b, c, d deux à deux distincts de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \simeq \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, on appelle birapport de ces 4 points, noté $[a, b, c, d]$, l'élément $h_{a,b,c}(d)$ (qui diffère donc a priori de $\infty, 0, 1$). Comment convient-il de prolonger le birapport si d coïncide avec a, b ou c ? Si φ est une homographie de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, montrer (sans calculs !) que $h_{\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)} = h_{a,b,c} \circ \varphi^{-1}$, et en déduire (de nouveau sans calculs !) que le birapport est invariant par les homographies, i.e. que $[\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)] = [a, b, c, d]$. Montrer inversement que toute bijection φ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ préservant le birapport est une homographie.

2. (*Quelques propriétés géométriques classiques de la sphère de Riemann*)

(a) Montrer qu'on a des isomorphismes naturels

$$S^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

où la première flèche est

$$S^2 \ni \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \frac{u+iv}{1+w} \quad \text{d'inverse} \quad \zeta \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{2\zeta}{1+|\zeta|^2} \\[2mm] \dfrac{1-|\zeta|^2}{1+|\zeta|^2} \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \mathbb{C} \\ \times \\ \mathbb{R} \end{matrix} \simeq \mathbb{R}^3,$$

et où la deuxième flèche est

$$\zeta \longmapsto [\zeta : 1] \quad \text{d'inverse} \quad [z_0 : z_1] \longmapsto \zeta = \frac{z_1}{z_0}.$$

La composée $S^2 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est alors

$$S^2 \ni \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \longmapsto [u+iv : 1+w] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \quad \text{d'inverse} \quad [z_0 : z_1] \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{2z_0\overline{z}_1}{|z_0|^2+|z_1|^2} \\ \dfrac{|z_0|^2-|z_1|^2}{|z_0|^2+|z_1|^2} \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \mathbb{C} \\ \times \\ \mathbb{R} \end{matrix} \simeq \mathbb{R}^3.$$

(b) On s'intéresse aux intersections de la sphère de Riemann S^2 avec les plans affines $\alpha u+\beta v+\gamma w = \delta$. Que sont géométriquement ces ensembles (on discutera en fonction de la valeur du rapport $\delta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$) ? Montrer que dans les coordonnées homogènes (z_0, z_1) de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ ces ensembles correspondent aux cônes isotropes des formes quadratiques hermitiennes

$$q(z_0, z_1) = 2\,\mathrm{Re}((\alpha+i\beta)z_0\overline{z}_1) + \gamma(|z_0|^2 - |z_1|^2) - \delta(|z_0|^2 + |z_1|^2)$$

Montrer qu'inversement toute forme quadratique hermitienne q sur $\mathbb{C}^2$ s'écrit sous cette forme pour des coefficients réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bien choisis, et que q est de signature $(1,1)$ précisément quand $\delta^2 < \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ (ce qui implique $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$).

(c) Montrer que les transformations linéaires bijectives $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ préservent les formes quadratiques hermitiennes de $\mathbb{C}^2$ et leur signature (i.e. $u^*q(z) := q(u(z))$ est encore quadratique hermitienne de même signature que q), et en déduire (sans calculs !) que les homographies de la sphère de Riemann transforment les cercles de S^2 en cercles de S^2.

(d) En utilisant la coordonnée non homogène $\zeta = z_1/z_0$, montrer que la projection stéréographique $S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ envoie les cercles de S^2 sur les la famille de cercles et droites affines de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (chaque droite étant complétée en un "cercle de diamètre infini" en ajoutant le point à l'infini).

(e) Soient a, b, c, d quatre points deux à deux distincts de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Montrer qu'il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

– Il existe une homographie h qui envoie a, b, c, d sur quatre points réels (avec ou sans l'infini), par exemple $\infty, 0, 1$ et un certain réel $x \neq \infty, 0, 1$, ou (si on veut) 4 réels finis 2 à 2 distincts.
– le birapport $[a, b, c, d]$ est réel,
– a, b, c, d sont alignés ou cocycliques (i.e. contenus dans un même cercle).

3. (*Courbes de Fermat*)
On considère dans le plan affine $\mathbb{C}^2$ la courbe complexe C d'équation $x^d + y^d + 1 = 0$, où d est un entier positif.

(a) Montrer que cette courbe est lisse.

(b) Trouver l'équation dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de la complétion projective $\overline{C}$ de C (en identifiant $\mathbb{C}^2$ à la carte affine U_2 de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ muni des coordonnées homogènes (x, y, z)). Montrer que $\overline{C}$ a exactement d points à l'infini que l'on précisera.

(c) Quels sont les équations de $\overline{C}$ dans les cartes U_0 et U_1. Que peut-on en déduire pour ce qui est de la lissité de $\overline{C}$?

Remarque: Je ne vous demanderai pas de démontrer que $\overline{C} \setminus \{xyz = 0\}$ ne contient pas de point rationnels pour $d \geq 3$ ("Grand théorème de Fermat"): il a fallu 360 ans avant qu'Andrew Wiles démontre ce résultat ; la preuve utilise de façon essentielle la théorie arithmétique des courbes elliptiques, mais c'est très difficile ...

4. Montrer que la cubique $y^2 = x^3 + 1$ admet exactement un seul point à l'infini, et que sa complétion projective est lisse à l'infini.

5. (a) Montrer que les "cercles complexes" $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $R \neq 0$, passent toujours par les points à l'infini $[1 : \pm i : 0]$ (appelés "points cycliques").

(b) Montrer que deux cercles complexes distincts se coupent toujours en exactement 4 points, si on prend en compte les multiplicités d'intersection (un point de tangence compte double). On vérifiera en particulier que deux cercles complexes sont concentriques (vus dans la carte U_2) si et seulement si ils sont tangents en leurs deux points cycliques.