Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), examen du 11/05/2018

Durée: 3 heures
Notes de cours manuscrites autorisées
Les exercices 1 et 2-3 sont indépendants (mais 3 utilise en partie 2)

1. *Automorphismes du disque et du demi-plan de Poincaré*
On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} z > 0\}$, et si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $\mathrm{Aut}(\Omega)$ le groupe des automorphismes (holomorphes), c'est-à-dire des bijections holomorphes $\Omega \to \Omega$, avec comme loi de composition interne la composition des applications.
(a) Si $a \in \mathbb{D}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, on pose pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$\varphi_a(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}, \qquad h_\lambda(z) = \lambda z.$$

Vérifier par le calcul que

$$\varphi_{-a} \circ \varphi_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}, \qquad 1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1+\overline{a}z|^2},$$

et en déduire que φ_a et h_λ définissent des automorphismes de $\mathbb{D}$.
(b) Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. On pose $a = \varphi^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ et $\psi = \varphi \circ \varphi_a$. Que vaut $\psi(0)$? Déduire du lemme de Schwarz appliqué à ψ et ψ^{-1} que ψ est une homothétie h_λ et en conclure que tous les éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ sont des homographies (quelle est leur forme ?)
(c) On pose $u(z) = \frac{z-i}{z+i}$ et $v(z) = i\frac{1+z}{1-z}$. Montrer en notant $z = x + iy$, $y > 0$, que $|u(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{H}$, et que

$$\operatorname{Im}(v(z)) = \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \quad \text{si } z \in \mathbb{D}.$$

En déduire que $u : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ et $v : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.
(d) Montrer que les homographies $z \mapsto f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ réelle vérifient

$$\operatorname{Im}(f_M(z)) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$

et en déduire qu'elles définissent des automorphismes de $\mathbb{H}$ si $ad - bc > 0$. Montrer réciproquement que les automorphismes de $\mathbb{H}$ s'identifient à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser les questions précédentes pour voir que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est constitué d'homographies qui préservent $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}$ dans $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.)
(e) Montrer que les automorphismes de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ préservent la métrique dite de Poincaré sur $\mathbb{D}$, à savoir la forme quadratique

$$q_{\mathbb{D}}(z) = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \qquad \text{i.e. } q_{\mathbb{D}}(z)(\xi) = \frac{|\xi|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

pour tout vecteur ξ du plan $\mathbb{C}$ pris au point z. Ceci signifie par définition que la métrique $\varphi^* q_{\mathbb{D}}$ obtenue par la substitution $z = \varphi(\zeta)$, où $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, coïncide avec $q_{\mathbb{D}}$.
(f) Montrer de même que les éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ préservent

$$q_{\mathbb{H}}(z) = \frac{|dz|^2}{4\,|\operatorname{Im} z|^2}, \quad z \in \mathbb{H},$$

et qu'en fait v est une isométrie de $(\mathbb{D}, q_{\mathbb{D}})$ sur $(\mathbb{H}, q_{\mathbb{H}})$ (et u l'isométrie inverse).

2. *Quelques propriétés basiques des surfaces de Riemann compactes.*
Dans cet exercice, X désigne une surface de Riemann compacte et *connexe*.

(a) Expliquer pourquoi toute fonction holomorphe globale f sur X est nécessairement constante.

(b) Soit $g : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ une fonction méromorphe sur X, non identiquement égale à 0 ou ∞. Montrer que la somme des multiplicités des zéros et des pôles de g (celles des pôles étant par convention comptées négativement) est nulle.

(c) On appelle forme méromorphe α sur X (resp. champ de vecteurs méromorphe β sur X) toute expression s'écrivant $\alpha = a(z)\,dz$ (resp. $\beta = b(z)\frac{\partial}{\partial z}$) dans toute carte $\tau : U \to \Omega$ de X, avec a et b des fonctions méromorphes au sens usuel sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, relativement à la coordonnées locale $z = \tau(x)$. Si α et β sont tous deux holomorphes, montrer que $f = \alpha \cdot \beta$ est nécessairement une constante.

(d) On suppose ici α et β méromorphes non nuls. L'indice de α, noté $\operatorname{ind}(\alpha)$, est par définition la somme des multiplicités des zéros et des pôles de α (ces dernières comptées négativement), et de même pour $\operatorname{ind}(\beta)$. Montrer que $\operatorname{ind}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $\operatorname{ind}(\beta) \in \mathbb{Z}$ sont des entiers indépendants de α et β et que $\operatorname{ind}(\beta) = -\operatorname{ind}(\alpha)$.

(e) On suppose ici $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et on pose $\alpha_0 = dz$, $\beta_0 = \frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{C}$. Déterminer α_0 et β_0 en termes de la coordonnée locale $\zeta = 1/z$ au voisinage de l'infini, et en déduire les valeurs de $\operatorname{ind}(\alpha_0)$ et $\operatorname{ind}(\beta_0)$. Déterminer dans ce cas l'expression des champs et formes méromorphes quelconques α et β sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, et retrouver ainsi quels sont ceux qui sont *holomorphes* sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tout entier.

(f) On suppose ici que $X = \mathbb{C}/\Lambda$ est une courbe elliptique. Déterminer quels sont les formes holomorphes globales α et les champs de vecteurs globaux β sur X, et les valeurs de $\operatorname{ind}(\alpha)$ et $\operatorname{ind}(\beta)$. [*Indication* : les coefficients $a(z)$ et $b(z)$ sont alors des fonctions holomorphes périodiques de période Λ.]

(g) On suppose ici que $X = X_m$ est la courbe algébrique “de Fermat” $X_m \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de degré m, définie par l'équation $x^m + y^m + z^m = 0$ dans les coordonnées homogènes $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. On se place dans la carte affine $z \neq 0$ et on y utilise les coordonnées affines $u = x/z$, $v = y/z$. Préciser quels sont les points à l'infini de X_m dans ces coordonnées, et déterminer en quels points de X_m la fonction u (resp. v) est une coordonnée locale sur X_m.

(h) On reprend les notations de (g). Montrer que $\alpha = du = d(x/z)$ est une forme méromorphe sur X_m, dont les zéros sont les points d'intersection de X_m avec la droite $y = 0$, chacun étant de multiplicité $m - 1$, et montrer que les points à l'infini sont des pôles doubles (on observera pour cela que $u' = 1/u$ est une coordonnée locale au voisinage des points à l'infini). En déduire la formule

$$\operatorname{ind}(\alpha) = 2g - 2$$

où $g = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ est ce qu'on appelle le genre de X_m. A quoi correspondent les cas particuliers des petits degrés $m = 1, 2, 3$? Si $m \geq 3$, montrer que $\widetilde{\alpha} = v^{-2}du$ est partout holomorphe, y compris à l'infini, et que la somme des multiplicités de ses zéros vaut $m(m-3)$.

3. *Morphismes entre surfaces de Riemann*
(Cet exercice reprend la notion d'indice défini en 2 (d) et suppose la question 2 (f) résolue).
Soit $F : Y \to X$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann compactes et connexes. Si $\alpha = a(z)\,dz$ est une forme holomorphe sur X, on note $F^*\alpha$ la forme obtenue en effectuant le “changement de variable” $z = F(w)$ en coordonnées locales, c'est-à-dire $F^*\alpha = a(F(w))\,F'(w)\,dw$.

(a) Décrire ce qui se passe dans le cas où $X = Y = \mathbb{C}/\Lambda$ est une courbe elliptique. Que peut-on dire alors de F ? [*Rappel* : F' est alors une fonction holomorphe périodique]. Montrer que si $p \in \mathbb{Z}^*$, le morphisme $F(\dot{z}) = p \cdot \dot{z}$ est de degré p^2 (et n'est donc pas un isomorphisme si $p \neq \pm 1$).

(b) Montrer en général que l'on a nécessairement $\operatorname{ind}(F^*\alpha) \geq \operatorname{ind}(\alpha)$, et que si $\operatorname{ind}(\alpha) > 0$ l'égalité ne peut avoir lieu que si F est de degré 1 (i.e. un isomorphisme).

(c) Montrer qu'il existe des morphismes $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de tous degrés dans $\mathbb{N}^*$.

(d) Existe-t-il des morphismes $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}/\Lambda$ non constants ? des morphismes $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ non constants ?

(e) On désigne par X_m la courbe de Fermat de degré m. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(x, y, z) \mapsto (x^p, y^p, z^p)$ induit une application bien définie de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et, par restriction, un morphisme de $X_{mp} \to X_m$. Quel est son degré ?

(f) Montrer que s'il existe un morphisme non constant $X_{m'} \to X_m$ avec $m \geq 3$, alors $m' \geq m$, et que si $m' = m \geq 4$ il s'agit nécessairement d'un isomorphisme [*Indication* : utiliser 2 (h).]