Université Joseph Fourier **Agrégation de Mathématiques**
Exercices sur les modules **29 janvier 2014**

Dans tous les exercices, A désigne un anneau commutatif et unitaire (pouvant vérifier d'autres propriétés supplémentaires précisées au cas par cas).

1) [Autour de la notion importante de scindage]

a) Soient M, M' des A-modules, et $u : M \to M'$ une application A-linéaire surjective. On dit que u est *scindée* s'il existe une application A-linéaire $\sigma : M' \to M$, appelée *scindage* de u, telle que $u \circ \sigma = \mathrm{Id}_{M'}$. Montrer que l'on a alors une somme directe de A-modules $M = \sigma(M') \oplus \operatorname{Ker} u$ et un isomorphisme de A-modules $M \simeq M' \oplus \operatorname{Ker} u$.

b) Si M' est un module libre (i.e. s'il possède une base $(e'_i)_{i \in I}$ sur A), alors toute application A-linéaire $u : M \to M'$ surjective est scindée. Que peut-on en conclure si $A = K$ est un corps ? Écrire ce que le résultat précédent donne du point de vue des dimensions pour une application linéaire $u : E \to F$ entre K-espaces vectoriels (on applique ce qui précède à $\tilde{u} : E \to u(E)$ telle que $\tilde{u}(x) = u(x)$ pour tout $x \in E$).

c) Montrer que l'application naturelle de $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ n'est jamais scindée si $m > 1$. Montrer de même que si A est intègre et si I est un idéal non nul de A et distinct de A, l'application naturelle $u : A \to A/I$ n'est pas scindée (on pourra regarder l'élément $\sigma(\dot{1}_A)$, en supposant qu'il existe un scindage σ de u). Montrer qu'un tel scindage peut cependant parfois exister si A est non intègre (Indication: prendre un idéal bien choisi de l'anneau produit $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

d) On suppose ici que A est intègre. Si M est un A-module, on appelle partie de torsion de M, notée M_{tors} l'ensemble des $x \in M$ tels qu'il existe $\lambda \in A^*$ pour lequel $\lambda x = 0$. Montrer que M_{tors} est un sous A-module de M. (Est-ce le cas si on prend $M = A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, A n'étant pas alors un anneau intègre ?) Montrer que $M' = M/M_{\mathrm{tors}}$ n'a plus de torsion, c'est-à-dire que $M'_{\mathrm{tors}} = \{0\}$.

e) Soit A un anneau principal et $m = pq \in A^*$. Montrer que $u : A/mA \to A/pA$ est scindée si et seulement si $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$. De manière analogue si G est un groupe abélien fini et H un sous-groupe tel que $\mathrm{card}(H)$ et $\mathrm{card}(G/H)$ soient premiers entre eux, montrer que $u : G \to G/H$ est scindée (dans les groupes abéliens, c'est-à-dire dans les $\mathbb{Z}$-modules ; on pourra utiliser le théorème de structure des groupes abéliens finis). Donner un contre-exemple à cette propriété de scindage si les cardinaux ne sont pas premiers entre eux.

2) On note $\mathcal{M}_n(A)$ l'anneau (non commutatif !) des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans l'anneau A et $\mathrm{GL}_n(A)$ le groupe multiplication des matrices $M \in \mathcal{M}_n(A)$ qui sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(A)$ (on rappelle que ce sont les matrices M dont le déterminant $\det(M)$ est un élément inversible $u \in A^\times$).

a) On dit que deux matrices M et M' sont équivalentes s'il existe des matrices $P, Q \in \mathrm{GL}_n(A)$ telles que $M' = PMQ$. Montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. Comparer les déterminants de deux matrices équivalentes.

b) On suppose ici que A est un anneau principal. On note $S\langle M\rangle$ le sous-module de A^n engendré par les vecteurs colonnes de M (A^n étant identifié aux vecteurs colonnes à n lignes). Si $M' \sim M$ avec $M' = PMQ$, montrer que $x \mapsto Px$ donne un A-isomorphisme de $S\langle M\rangle$ sur $S\langle M'\rangle$. Examiner la réciproque (l'hypothèse étant : il existe un automorphisme de A^n qui envoie $S\langle M\rangle$ sur $S\langle M'\rangle$).

c) Si $A = K$ est un corps, montrer que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

d) On suppose de nouveau que A est un anneau prncipal. On appelle diviseurs élémentaires d'une matrice M les diviseurs élémentaires $d_1 | d_2 | \ldots | d_r$ du sous A-module $S\langle M\rangle \subset A^n$ (où r est le rang de ce module). Montrer que M est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire la condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices $M, M' \in \mathcal{M}_n(A)$ soient équivalentes.

e) Montrer que les matrices $M = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 80 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 48 \end{pmatrix}$ sont équivalentes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et trouver des matrices $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (disons de déterminant $+1$) telles que $M' = PMQ$. La matrice $M'' = \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$ de déterminant 960 leur est-elle équivalente ?

3) Soit K un corps commutatif.

a) Calculer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice compagnon $M = C(P)$ d'un polynôme unitaire $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0 \in K[X]$ (voir le problème MG11 !)

b) Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Déduire le théorème de Cayley-Hamilton (à savoir que $\chi_u(u) = 0$) du théorème de décomposition de E en sous-espaces cycliques comme $K[X]$-module.

c) Montrer que χ_u coïncide avec le polynôme minimal de u si et seulement si l'espace E est cyclique comme $K[X]$-module.