

La première partie de ce petit texte a pour objet de proposer sous forme d'exercices un énoncé topologique équivalent à la propriété de "continuité" des racines complexes d'un polynôme unitaire complexe, lorsque les coefficients varient. Même si un peu de topologie est utilisée, il s'agit un fait d'un résultat "presque algébrique", on n'utilise que de l'algèbre et des propriétés topologiques de base (compacité), comme dans la démonstration "de Cauchy" du théorème de d'Alembert.

1) Un lemme bien utile

Soit $P_a(z) = z^n - a_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n$ un polynôme unitaire à coefficients complexes a_j . Montrer que les racines z_j de P_a vérifient

$$\max |z_j| \leq 2 \max |a_j|^{1/j}$$

Que peut-on en conclure lorsque les coefficients a_j tendent vers 0 ?

2) Quelques propriétés topologiques basiques des espaces quotients

Soit X un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X . On note $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ l'application canonique de passage au quotient, qui à un élément $x \in X$ associe sa classe \bar{x} . Une partie U de X/\mathcal{R} est dite ouverte si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert.

- Montrer que cela définit une topologie sur X/\mathcal{R} et que l'application π est continue.
- Montrer la propriété "universelle" suivante : si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue telle que l'image $f(x)$ ne dépend que de la classe \bar{x} , alors il existe une unique application $\bar{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$, et \bar{f} est continue.
- Montrer qu'en général le quotient X/\mathcal{R} d'un espace séparé n'est pas séparé (on pourra montrer par exemple que la topologie de \mathbb{R}/\mathbb{Q} est grossière – de même, le quotient E/F d'un espace normé E par un sous-espace dense F).
- Si X/\mathcal{R} est séparé, montrer que le graphe de \mathcal{R} doit être une partie fermée de $X \times X$, et que dans ce cas les classes d'équivalence sont fermées.
- On suppose ici que (X, d) est un espace métrique compact et que le graphe de \mathcal{R} est fermé. On définit $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y})$ comme l'inf des distances $d(x, y)$ des représentants x, y des classes \bar{x}, \bar{y} . Montrer que \bar{d} est une distance sur X/\mathcal{R} et que l'application $(X, d) \rightarrow (X/\mathcal{R}, \bar{d})$ est lipschitzienne. En déduire que la topologie quotient de X/\mathcal{R} est séparée et que X/\mathcal{R} est un espace compact dont la topologie est définie par la distance \bar{d} .
- On suppose ici que X est un espace métrisable localement compact, muni d'une relation \mathcal{R} de graphe fermé et "propre" au sens suivant : pour tout compact K de X , son saturé K' (réunion des classes d'équivalence de tous les éléments de K est encore compact). Montrer que X/\mathcal{R} est séparé et localement compact [se ramener à (e) en considérant le saturé K' d'une boule fermée $K = \bar{B}(x_0, r)$ avec $r > 0$ pris assez petit pour que K soit compact].
- Montrer que (f) s'applique pour $X = \mathbb{C}^n$ et l'application de passage au quotient $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n/\mathcal{S}_n$ sous l'action du groupe symétrique \mathcal{S}_n agissant par permutation des coordonnées. Si on munit \mathbb{C}^n de la distance $d(z, w) = \max |z_j - w_j|$, expliciter la distance \bar{d} définie en (e). Comment interpréter la boule ouverte $B(\bar{z}, \varepsilon)$ pour la distance \bar{d} , lorsque $\varepsilon > 0$ est strictement plus petit que $\frac{1}{2} \min_{z_j \neq z_k} |z_j - z_k|$? (on pourra associer des multiplicités aux valeurs z_j qui sont répétées) ?

3) On considère l'application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ donnée par

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\sigma_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \sigma_n(z_1, \dots, z_n))$$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ désignent les fonctions symétriques élémentaires.

a) Montrer que f induit est une application continue propre (au sens topologique), c'est-à-dire que l'image inverse d'un compact est un compact [utiliser le lemme 1)]

b) Dédire de a) que f induit une application continue $\bar{f} : \mathbb{C}^n/S_n \rightarrow \mathbb{C}^n$, puis que \bar{f} est un homéomorphisme [on pourra étudier les restrictions $(\bar{f})^{-1}(K) \rightarrow K$ lorsque K est une partie compacte de \mathbb{C}^n , en exploitant l'observation (a)].

c) Formuler en termes de distances, de $\varepsilon > 0$ et de $\delta > 0$ la continuité de l'application \bar{f}^{-1} (théorème de continuité des racines d'un polynôme ...)

4)** Calculer le jacobien de f définie en (3) – voir par exemple

<http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/jacobsym.pdf>

<http://objagr.gforge.inria.fr/documents/files/jacobien-fonction-symetrique.pdf>

et en déduire que f est un difféomorphisme local (holomorphe) de $\mathbb{C}^n \setminus D$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \Delta$, où D est l'ensemble des n -uplets de complexes non tous distincts (c'est une réunion d'hyperplans), et Δ l'ensemble algébrique défini comme lieu des zéros du discriminant $\delta(a_1, \dots, a_n) = 0$.

5) Théorème fondamental des polynômes symétriques

Pour une démonstration classique simple, voir S. Lang, Algebra, IV, Theorem 6.1, ou Tauvel, Algèbre, Lemme 13.10.2. La démonstration donnée en séance de leçons semble plus fréquente dans les ouvrages et polys français, elle est peut-être plus algorithmique, mais à mon avis elle est plus compliquée à présenter que celle de Lang et Tauvel), cf. par exemple

http://math.unice.fr/~walter/L3_Alg_Arith/cours2.pdf ou

http://math.univ-lyon1.fr/~cretin/Algebre/polynomes_symetriques.pdf

6) Identités de Newton

Sur un corps K quelconque (on pourra prendre $K = \mathbb{C}$ si on le souhaite), vérifier que l'on a dans $K[X]$ l'identité

$$\prod_{j=1}^n (1 - z_j X) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_j X^j.$$

a) Vérifier [par dérivée logarithmique !] que

$$\sum_{j=1}^n \frac{z_j}{1 - z_j X} = \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j \sigma_j X^{j-1}}{\sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_j X^j}.$$

b) Montrer que le membre de gauche de l'égalité (a) admet un développement en série formelle (convergente pour $|X|$ assez petit, si on est sur \mathbb{C}) $\sum_{k=0}^{+\infty} S_{k+1} X^k$, où $S_k = \sum_{j=1}^n z_j^k$.

c) En faisant une identification du coefficient de X^{k-1} après multiplication par $\sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_j X^j$, en déduire pour tout $k \geq 1$ les identités

$$S_1 = \sigma_1, \quad S_2 = \sigma_1 S_1 - 2\sigma_2, \quad S_3 = \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1 + 3\sigma_3, \quad \dots, \quad S_k = \sum_{j=1}^{\min(n, k-1)} (-1)^{j-1} \sigma_j S_{k-j} + (-1)^{k-1} k \sigma_k$$

en posant $\sigma_j = 0$ pour $j > n$.

d) Montrer par récurrence sur k (sans utiliser le théorème fondamental des polynômes symétriques) que $S_k \in \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_k]$ pour $k \leq n$ et que $S_k \in \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ pour $k \geq n$.