CHAPITRE 1

Rappels sur $\mathbb{R}$

Ce chapitre, bien qu'élémentaire est indispensable a la bonne compréhension du cours, car $\mathbb{R}$ est d'une part l'espace fondamental de l'analyse et d'autre part se trouve être le modèle sur lequel les différentes notions du cours seront testées.

1.1. L'ensemble des nombres réels

Le besoin de définir $\mathbb{R}$ s'est fait sentir au XIX^e siècle ; à cette époque, ont été données deux constructions de $\mathbb{R}$ [cf. par exemple, Lelong-Ferrand Arnaudies Tome 2].

On va se contenter d'en donner une définition axiomatique :

$\mathbb{R}$ *est le corps totalement ordonné dans lequel toute partie majorée non vide admet une borne supérieure.*

Remarque 1. La borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ ne peut exister que si A est non vide et majorée.

Remarque 2. La borne supérieure s de A peut appartenir ou non à A; par exemple $A = [0,\ 1]$, $A = [0,\ 1[$.

En fait, $s \in A$ si et seulement si A a un plus grand élément. (Pourquoi ?)

Caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ *; alors* s *est la borne supérieure de* A *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) $s + \varepsilon$ *est un majorant de* A.

ii) $s - \varepsilon$ *n'est pas un majorant de* A*, c.à.d qu'il existe* $a \in A$ *tel que* $s - \varepsilon < a$.

Essayer de le montrer. (De l'aide ?)

Donner une caractérisation analogue de la borne inférieure.

On notera $\sup A$ (resp. $\inf A$) la borne supérieure (resp. inférieure) de A lorsqu'elle existe.

Remarque. Si A est majorée et minorée on a $\sup A - \inf A = \sup\{|x-y| \; |x \in A, y \in A\}$. (Pourquoi ?)

Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ s'appelle un *intervalle* si pour tout $x, y \in A$, tout point z de $\mathbb{R}$ tel que $x \leqslant z \leqslant y$ appartient à A.

Décrire tous les types d'intervalles (De l'aide ?)

On peut rajouter parfois à $\mathbb{R}$ deux éléments $-\infty$ et $+\infty$ et poser

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

avec la condition : $-\infty < x < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On appelle habituellement $\overline{\mathbb{R}}$ *la droite achevée.*

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie (non vide) admet une borne supérieure et une borne inférieure.

1.2. Suites de nombres réels

DÉFINITION 1.2.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la *limite* de la suite $(u_n)_{n\in bbN}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N > 0$ tel que si $n > N$ alors $|u_n - l| < \varepsilon$.

Rappel. *Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) de* $\mathbb{R}$ *converge vers* $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ *(resp.* $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$*).*

Application. *Une intersection d'intervalles fermés bornés emboîtés non vides de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle fermé borné non vide de* $\mathbb{R}$.

Attention ! C'est faux sans l'hypothèse "fermé borné". Par exemple :

a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0,\ 1/n[= \emptyset$

b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n,\ +\infty[= \emptyset$

DÉMONSTRATION. Considérons la suite d'intervalles

$$[a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset \cdots \supset [a_n,\ b_n] \supset \cdots$$

La suite de nombres réels (a_n) est croissante et la suite de nombres réels (b_n) est décroissante. Comme ces deux suites sont bornées, $a = \lim a_n$ et $b = \lim b_n$ existent et on a $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$. Vérifier alors que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,\ b_n] = [a, b].$$

(Remarquer que puisque $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$, $[a, b] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,\ b_n]$, puis utiliser que $a = \operatorname{Sup} a_n$, $b = \operatorname{Inf} b_n$, et la caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure.) □

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$ on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{u_p \mid p \geqslant n\}.$$

Alors les A_n sont des parties bornées de $\mathbb{R}$ et on a $A_n \supset A_{n+1}$. Posons maintenant $s_n = \sup A_n$ et $i_n = \inf A_n$. On vérifie que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée et que $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée. Elles sont donc convergentes.

DÉFINITION 1.2.2. On appelle *limite supérieure* (resp. *limite inférieure*) de la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on la note $\overline{\lim}\, u_n$ (resp. $\underline{\lim}\, u_n$) la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Du fait que $i_n \leqslant s_n$, il résulte que $\underline{\lim}\, u_n \leqslant \overline{\lim}\, u_n$.
L'intérêt est que pour toute suite bornée de nombres réels, $\overline{\lim}$ *et* $\underline{\lim}$ *existent*
Exemple. Si $u_n = (-1)^n + 1/n$ on a

$$\underline{\lim}\, u_n = -1, \ \overline{\lim}\, u_n = 1.$$

PROPOSITION 1.2.3. *Soit (u_n) une suite bornée de nombres réels. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) $\underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$
ii) la suite (u_n) est convergente.
De plus, si l'une de ces assertions est vraie, alors $\underline{\lim}\, u_n = \lim u_n = \overline{\lim}\, u_n$.

DÉMONSTRATION. **Essayer de le montrer.** (De l'aide ?) □

Rappel. (u_n) est une *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $|u_p - u_q| < \varepsilon$ dès que $p, q > N$.

THÉORÈME 1.2.4. *Dans $\mathbb{R}$ toute suite de Cauchy est convergente.*

DÉMONSTRATION. **Essayer de le montrer.** (De l'aide ?) □

CHAPITRE 2

Espaces métriques

Le lecteur débutant pourra commencer par étudier le cas de $\mathbb{R}$. Des liens permettent de relier les notions qui se correspondent dans $\mathbb{R}$ et dans le cas général des espaces métriques ou topologiques.

2.1. Distance

2.1.1. Définition et exemples

DÉFINITION 2.1.1. Si E est un ensemble, une *distance* sur E est une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :
i) $d(x, y) \geqslant 0$ pour tout $x, y \in E$
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in E$ (Symétrie)
iii) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (Séparation)
iv) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $x, y \in E$ (Inégalité triangulaire)
Un *espace métrique* est un couple (E, d), où E est un ensemble et d une distance sur E.

Propriétés : si (E, d) est un espace métrique, on a les inégalités suivantes :

i) $d(x, z) \geqslant |d(x, y) - d(y, z)|$ pour tout $x, y, z \in E$;

ii) $d(x_0, x_p) \leqslant d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{p-1}, x_p)$ pour toute famille $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de point de E.

Montrez-le ! de l'aide ?

Exemples :**vérifier que**

1) $(\mathbb{R}, d)$ où $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique ;

2) les couples suivants

$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ où $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$,

$(\mathbb{R}^n, d_1)$ où $d_1(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$

$(\mathbb{R}^n, d_2)$ où $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i)^2}$

sont des espaces métriques.

DÉFINITION 2.1.2. Soit (E, d) un espace métrique, x un point de E et r un nombre réel strictement positif. L'ensemble

$$B(x, r) = \{y \in E | d(x, y) < r\}$$

s'appelle la *boule ouverte* de centre x et rayon r, tandis que l'ensemble

$$\widetilde{B}(x, r) = \{y \in E | d(x, y) \leqslant r\}$$

s'appelle la *boule fermée* de centre x et rayon r.

Pour $n = 2$, **dessiner** les boules $B(x, 1)$ pour un point x des espaces métriques de l'exemple 2).

Comparer les boules $B(0, 1)$ pour les distances d_∞, d_1 et d_2. (Vérifier que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$d_\infty(x,\ y) \leqslant d_2(x,\ y) \leqslant d_1(x,\ y) \leqslant n \cdot d_\infty(x,\ y).$$

et conclure.)

D'autres exemples :

3) Si E est un ensemble, on considère l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} d(x,\ x) = 0 \\ d(x,\ y) = 1 \quad \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

Vérifier que c'est une distance sur E qu'on appelle *distance discrète*.

4) Soit $\mathscr{B}(A,\ \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées d'un ensemble A dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\sigma(f,\ g) = \sup_{x \in A} \left| f(x) - g(x) \right| \quad f,\ g \in \mathscr{B}(A,\ \mathbb{R})$$

. **Vérifier que** σ est une distance sur $\mathscr{B}(A,\ \mathbb{R})$.

5) Pour $f,\ g \in \mathscr{C}([a,\ b]\ ,\ \mathbb{R})$ on note $\mu(f,\ g) = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$. **Vérifier que** μ est une distance sur $\mathscr{C}([a,\ b]\ ,\ \mathbb{R})$.

DÉFINITION 2.1.3. Soient $(E,\ d)$ un espace métrique. On dit qu'une partie A de E est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $d(x,\ y) \leqslant M$ pour tout $(x,\ y) \in A \times A$. Si $A \neq \emptyset$, on note alors

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{(x,\, y) \in A \times A} d(x,\ y)$$

c'est le *diamètre* de A.

Exemples.

1) **Montrer que** le diamètre d'une boule est inférieur ou égal au double de son rayon.

2) Sur un ensemble E muni de la distance discrète, quel est le diamètre de la boule $B\left(x,\ \frac{1}{2}\right)$?
de l'aide ?

D'autres espaces métriques :

1) Soient $(E,\ d)$ un espace métrique et $A \subset E$ une partie de E. Alors A est considérée de manière naturelle comme un espace métrique pour la distance $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_A = d_{|A\times A}$, autrement dit $d_A(x,\ y) = d(x,\ y)$ pour tout $x,\ y \in A$; d_A s'appelle la *distance sur A induite par celle de E.*

Si $x \in A$, on notera $B^A(x,\ r)$ (resp. $\widetilde{B}^A(x,\ r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r pour la distance d_A. On remarquera que $B^A(x,\ r) = B(x,\ r) \cap A$.

2) Soient $(E_1,\ d_1)$, ..., $(E_n,\ d_n)$ des espaces métriques. On peut alors définir une distance, appelée *distance produit*, sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ en posant

$$\delta(x,\ y) = \max_{i=1,\ldots,n} d_i(x_i,\ y_i)$$

pour $x = (x_1, \ldots,\ x_n),\ y = (y_1, \ldots,\ y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

Si $x = (x_1, \ldots,\ x_n)$, on note $B_\delta(x,\ r)$ (resp. $\widetilde{B}_\delta(x,\ r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r pour la distance δ. On a

$$B_\delta(x,\ r) = B_{d_1}(x_1,\ r) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n,\ r).$$

Exemple. $(\mathbb{R}^n,\ d_\infty)$ est un espace métrique produit.

2.1.2. Espaces vectoriels normés

On désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

DÉFINITION 2.1.4. Une *norme* sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$ notée $x \mapsto \|x\|$ vérifiant :

(i) $\|x\| \geqslant 0$ pour tout $x \in E$
(ii) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$
(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et tout $x \in E$
(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, \ y \in E$ (*Inégalité triangulaire*)

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé *espace vectoriel normé* (en abrégé *evn*).

PROPOSITION 2.1.5. *Si* $(E, \ \|\bullet\|)$ *est un espace vectoriel normé, l'application* $(x, \ y) \mapsto \|x - y\|$ *est une distance sur* E.

DÉMONSTRATION. **Détailler la preuve**

$\square$

Remarque. Soit $(E, \ \|\bullet\|)$ un espace vectoriel normé et notons d la distance associée. Montrer que d est invariante par translation, i.e $d(x + z, \ y + z) = d(x, \ y)$ pour tout $x, \ y, \ z \in E$.

Exemples. **Vérifier que** les distances des exemples 2), 4) et 5) du 2.1.1 sont des distances qui proviennent d'une norme sur les espaces vectoriels correspondants.

2.2. Espaces métriques

2.2.1. Voisinages.

Nous allons voir qu'à une distance sur un ensemble on peut associer des objets géométriques particulièrement intéressants. En effet si $(E, \ d)$ est un espace métrique et x un point de E, la boule $B(x, \ r)$ est l'ensemble des points de E qui sont proches ou voisins de x dans un certain sens, à savoir que leur distance à x est inférieure à r. Cela nous conduit à poser la définition suivante :

Définition 2.2.1. Soit (E, d) un espace métrique et x un point de E. On dit qu'une partie V de E est un voisinage de x s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$. On note $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Remarque.Un voisinage de x contient tous les points assez proches de x, mais également des points qui peuvent être très loin de x. D'après la définition, E tout entier est un voisinage de x.

Propriétés des voisinages. Soit $a \in E$, alors :

V_1) a appartient à tout élément de $\mathscr{V}(a)$

V_2) Toute partie W de E qui contient un élément de $\mathscr{V}(a)$ est aussi un élément de $\mathscr{V}(a)$

V_3) Toute intersection finie d'éléments de $\mathscr{V}(a)$ est encore un élément de $\mathscr{V}(a)$.

V_4) Si $V \in \mathscr{V}(a)$, il existe un élément $W \in \mathscr{V}(a)$ tel que pour tout $b \in W$, on ait $V \in \mathscr{V}(b)$.

On remarque en outre que la propriété suivante est vérifiée :

Propriété de séparation : si a et b sont deux points distincts de E, il existe $V_a \in \mathscr{V}(a)$ et $V_b \in \mathscr{V}(b)$ tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$.

Persuadez-vous sur un dessin que les propriétés ci-dessus sont vérifiées, puis prouvez-les.

de l'aide ?

Remarque.Deux distances sur un même ensemble peuvent définir les mêmes voisinages de x. On dit alors que les deux distances sont *topologiquement équivalentes.*

Proposition 2.2.2. *Pour que deux distances d_1 et d_2 sur un ensemble E soient topologiquement équivalentes il faut et il suffit que pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta, \eta' > 0$ tels que $B_{d_2}(x, \eta) \subset B_{d_1}(x, \varepsilon)$ et $B_{d_1}(x, \eta') \subset B_{d_2}(x, \varepsilon)$.*

Attention ! η et η' dépendent de x et de ε

DÉMONSTRATION. La condition nécessaire est une conséquence immédiate de la définition des voisinages. Pour la condition suffisante, il suffit de prouver que tout point x de E admet les mêmes voisinages pour chacune des deux distances d_1 et d_2. $\square$

Remarque. On peut noter que la donnée pour chaque point x d'un espace métrique (E, d) de l'ensemble $\mathfrak{V}_x = \left\{B(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ permet de définir complètement sa topologie. Remarquons que l'ensemble $\mathfrak{V}_x$ est dénombrable, c'est pourquoi les suites jouent un rôle fondamental dans l'étude des espaces métriques.

2.2.2. Ouverts, fermés.

DÉFINITION 2.2.3. Soit (E, d) un espace métrique. Une partie U de E est une partie ouverte de E (ou un *ouvert dans* E) si pour tout $x \in U$ il existe r_x tel que $B(x, r_x) \subset U$.

On déduit immédiatement de cette définition et de la notion de voisinage qu'une partie U de E est une partie ouverte de E, si U est un voisinage de chacun de chacun de ses points.

Propriétés des parties ouvertes d'un espace topologique.

(O_1) $\emptyset$ et E sont des parties ouvertes de E

(O_2) Toute réunion de parties ouvertes de E est encore une partie ouverte de E

(O_3) Toute intersection *finie* de parties ouvertes de E est encore une partie ouverte de E.

DÉMONSTRATION. **Montrez-le !** de l'aide ? $\square$

Exemples. **Vérifier que**

1) Dans $\mathbb{R}$, un intervalle ouvert $]a,\ b[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle.
2) Dans un espace métrique, une boule ouverte est une partie ouverte.

DÉFINITION 2.2.4. Soit (E,d) un espace métrique. On dit que $A \subset E$ est une partie fermée de E si $\complement_E A$ est une partie ouverte de E.

Exemples. Vérifier que

1) Dans $\mathbb{R}$ un intervalle fermé est une partie fermée pour la topologie usuelle.
2) Dans un espace métrique E une boule fermée est une partie fermée.

Remarque. Les parties d'un espace métrique ne sont pas comme des portes : elles peuvent être ouvertes **et** fermées (par exemples $\emptyset$ et E) et elles peuvent n'être **ni** ouvertes **ni** fermées (**Vérifier que** dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ n'est ni ouvert ni fermé).

Propriétés des parties fermées d'un espace topologique E.

(F_1) $\emptyset$ et E sont des parties fermées de E.
(F_2) Toute intersection de parties fermées de E est une partie fermée de E.
(F_3) Toute union *finie* de parties fermées de E est une partie fermée de E.
Elles se déduisent de (O_1), (O_2) et (O_3) par passage au complémentaire. de l'aide ?

2.2.3. Intérieur, extérieur, frontière, adhérence.

DÉFINITION 2.2.5. Soit A une partie de E. On dit qu'un point $x \in E$ est intérieur à A si A contient une boule ouverte centrée en x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et on le note $\overset{\circ}{A}$.

PROPOSITION 2.2.6. *L'intérieur d'une partie A de E est un ouvert de E et c'est le plus grand ouvert de E contenu dans A.*

DÉMONSTRATION. D'après la définition 2.2.5, un point x est intérieur à A s'il existe une boule ouverte centrée en x contenue dans A et de plus tout point de cette boule est intérieur à A ; il en résulte que $\overset{\circ}{A}$ est une réunion d'ensembles ouverts contenus dans A et c'est le plus grand ouvert de E contenu dans A (**pourquoi ?**). □

Exemples. **Montrer que :**

1) si $E = \mathbb{R}$, l'intérieur des intervalles de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ est l'intervalle de la forme $]a, b[$.
2) si $E = \mathbb{R}$, l'intérieur de l'ensemble $\mathbb{Q}$ est vide ainsi que celui de son complémentaire.
3) si $E = \mathbb{R}^n$ est muni de l'une des distances d_∞, d_1, d_2, l'intérieur de la boule fermée $\widetilde{B}(x, r)$ est la boule ouverte $B(x, r)$. Attention cette propriété n'est pas vraie pour une distance quelconque (Si E est muni de la distance discrète, **comparer** $\widetilde{B}(x, 1)$ et $B(x, 1)$).

***Propriétés élémentaires*.** **Vérifier que** si A et B sont des parties de E, on a :

1) si $A \subset B$ alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
2) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
3) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.
4) Donner un exemple où l'inclusion de 3) est stricte.

DÉFINITION 2.2.7. Soit A une partie de E. On dit qu'un point $x \in E$ est *extérieur* à A s'il existe un voisinage de x dans E ne rencontrant pas A. L'ensemble des points extérieurs à A s'appelle l'*extérieur* de A et on le note $\mathrm{ext}(A)$.

Remarque : $\mathrm{ext}(A) = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E A}}$.

DÉFINITION 2.2.8. Soit A une partie de E. On dit qu'un point $x \in E$ est *adhérent* à A si toute boule ouverte de centre x dans E rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et on le note $\overline{A}$.

PROPOSITION 2.2.9. *L'adhérence de A est fermée et c'est le plus petit ensemble fermé de E contenant A. En particulier A est fermée si et seulement si* $A = \overline{A}$.

DÉMONSTRATION. La relation $x \notin \overline{A}$ équivaut à $x \in \overbrace{\complement_E A}^{\circ}$ **(pourquoi ?)**, par conséquent $\overline{A}$ est fermé. De plus si F est une partie fermée de E contenant A, $\complement_E F$ est un ouvert de E contenu dans $\overbrace{\complement_E A}^{\circ}$ **(pourquoi ?)**, d'où $F \supset \overline{A}$. $\square$

Exemples. **Montrer que**

1) si $E = \mathbb{R}$, l'adhérence des intervalles de la forme $[a,\ b]$, $[a,\ b[$, $]a,\ b]$ et $]a,\ b[$ est l'intervalle de la forme $[a,\ b]$.
2) si $E = \mathbb{R}^n$ est muni de l'une des distances d_∞, d_1, d_2, l'adhérence de la boule ouverte $B(x,\ r)$ est la boule fermée $\widetilde{B}(x,\ r)$. Attention , dans un espace métrique quelconque on a seulement $\overline{B(x,\ r)} \subset \widetilde{B}(x,\ r)$.

DÉFINITION 2.2.10. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. On dit que A est *dense* dans B si $B \subset \overline{A}$. On dit que A est *partout dense* si $\overline{A} = E$.

Exemple. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont partout denses dans $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 2.2.11. Si A est une partie de E, on dit que le point $x \in E$ est un point frontière de A si tout voisinage de x rencontre à la fois A et son complémentaire. La *frontière* de A est l'ensemble des points frontières et on le note $\mathrm{Fr}A$ ou ∂A.

Remarque. On a immédiatement $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\complement_E A}$ et donc la frontière de A est une partie fermée de E.

Terminons en récapitulant la situation :

Si E est un espace métrique et si A est une partie de E, on a :

1) $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$;

2) $E = \mathrm{Ext}A \cup \partial A \cup \overset{\circ}{A}$ et ces trois ensembles sont deux à deux disjoints.

2.2.4. Distance induite.

Définition 2.2.12. Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ une partie de E. Alors A est considérée de manière naturelle comme un espace métrique pour la distance $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_A = d_{|A\times A}$, autrement dit $d_A(x, y) = d(x, y)$ pour tout $x, y \in A$; d_A s'appelle la *distance sur A induite par celle de E*.

Si $x \in A$, on notera $B^A(x, r)$ (resp. $\widetilde{B}^A(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r pour la distance d_A. On remarquera que $B^A(x, r) = B(x, r) \cap A$.

Exemple. **Déterminer** la distance induite sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ par la distance d_1 de $\mathbb{R}^2$.

Notons que *les voisinages de $x \in A$ associés à la distance d_A* sont exactement les intersections de A avec les voisinages de x dans E pour la distance d.

Propriétés : **Vérifier que** pour la distance induite sur A par celle de E on a :

1) U est une partie ouverte de A si et seulement si il existe une partie ouverte O de E telle que $U = O \cap A$.

2) F est une partie fermée de A si et seulement si il existe une partie G fermée de E telle que $F = G \cap A$.

3) si A est une partie ouverte (resp. fermée) de E, alors toute partie ouverte (resp. fermée) de A est une partie ouverte (resp. fermée) de E.

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}$ et $A = [a, b]$ un intervalle de E. Si $c \in \,]a, b[$, alors $[a, c[$ est une partie ouverte de A pour la distance induite. On remarque qu'une partie ouverte pour la distance induite n'est pas une partie ouverte pour la distance ambiante.

EXERCICE. Donner un exemple du même type pour les parties fermées.

Important. La notion de partie ouverte et de partie fermée n'est pas une notion absolue mais une notion relative ; pour une partie donnée, le fait qu'elle soit ouverte ou fermée dépend de l'espace métrique dans lequel elle est considérée : $[a, c[$ n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}$ mais c'est une partie ouverte de $[a, b]$.

2.2.5. Suites dans un espace métrique.

Dans un espace métrique (E, d), une *suite* est une application de $\mathbb{N}$ dans E notée habituellement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les suites jouent un rôle particulièrement important dans les espaces métriques.

DÉFINITION 2.2.13. Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers un point $x \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N_ε tel que, pour tout $n > N_\varepsilon$, on ait $d(x, x_n) < \varepsilon$.

DÉFINITION 2.2.14. Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit qu'un point $x \in E$ est une *valeur d'adhérence* de cette suite si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier N, il existe un entier $n > N$ tel que $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Exemples. Quelles sont les valeurs d'adhérence des suites

$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } ((-1)^n + 1/n)_{n\in\mathbb{N}}?$$

Remarque. **Prouver** les assertions suivantes :

1) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans E sa limite est unique.

2) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans E, elle a une seule valeur d'adhérence qui est sa limite.

3) Donner un exemple de suite dans $\mathbb{R}$ qui possède une seule valeur d'adhérence mais qui ne converge pas.

PROPOSITION 2.2.15. *Soient (E, d) un espace métrique et $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Un point $x \in E$ est une valeur d'adhérence de s si et seulement si il existe une suite extraite de s qui converge vers x.*

DÉMONSTRATION. Si x est une valeur d'adhérence de s, nous allons construire une suite strictement croissante $(\varphi(p))_{p\in\mathbb{N}}$ vérifiant $d(x, x_{\varphi(p)}) < 1/p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On définit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de proche en proche. On pose $\varphi(0) = 0$ et si φ est définie sur les entiers inférieurs strictement à k, $k \geqslant 1$, on pose

$$\varphi(k) = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n > \varphi(k-1) \text{ et } x_n \in B\left(x, \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Par définition de la valeur d'adhérence, on a

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n > \varphi(k-1) \text{ et } x_n \in B(x, 1/k)\} \neq \emptyset$$

et par conséquent $\varphi(k)$ existe et on a bien $d(x, x_{\varphi(k)}) < 1/k$. La suite $(x_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers x (**pourquoi ?**)

Réciproquement, si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante telle que $(x_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers x, alors x est une valeur d'adhérence de s : en effet : □

Caractérisation de l'adhérence d'une partie d'un espace métrique.

PROPOSITION 2.2.16. *Si A est une partie d'un espace métrique (E, d), les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $x \in \overline{A}$.

ii) il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge dans E vers x.

DÉMONSTRATION. Prouvons que i)$\Longrightarrow$ii). Pour tout $n > 0$, on a $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. On peut "choisir", pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un point $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers x (**pourquoi ?**)

Considérons l'implication ii)$\Longrightarrow$i). Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in E$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, donc $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Il en résulte que $x \in \overline{A}$. □

COROLLAIRE 2.2.17. *Soit A une partie d'un espace métrique (E, d). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A est une partie fermée de E.

ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge dans E vers un point x, $x \in A$.

DÉMONSTRATION. **Essayer de le montrer**. (De l'aide ?) □

2.3. Applications continues - Homéomorphismes

2.3.1. Continuité en un point

On remarque, au vu de la définition de la continuité en un point pour une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que si f est une application d'un ensemble X dans un ensemble Y, la notion de continuité de f en un point x_0 de X nécessite la notion de points voisins d'un point donné, ce qui conduit naturellement à la généraliser aux espaces métriques.

DÉFINITION 2.3.1. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et x_0 un point de E. On dit qu'une application $f : E \longrightarrow E'$ est *continue au point* x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, x_0) < \eta$ implique $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

PROPOSITION 2.3.2. *L'application* $f : E \longrightarrow E'$ *est continue en* $x_0 \in E$ *si et seulement si pour tout voisinage* V' *de* $f(x_0)$ *dans* E', $f^{-1}(V')$ *est un voisinage de* x_0 *dans* E.

DÉMONSTRATION. Supposons que f soit continue en x_0 ; si V' est un voisinage de $f(x_0)$ dans E', il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset V'$; alors on a $f^{-1}(V') \supset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ et il existe $\eta > 0$ tel que $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \supset B(x_0, \eta)$ (**pourquoi ?**). Il en résulte que $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x_0.

Réciproquement, prenons $V' = B(f(x_0), \varepsilon)$; si $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $f^{-1}(V') \supset B(x_0, \eta)$, autrement dit si $d(x, x_0) < \eta$ alors $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. $\square$

Ce résultat permet de généraliser la notion de continuité en un point au cas des applications entre espaces topologiques.

Exemples. **Vérifier que** si E et E' sont deux espaces métriques :

1) toute application constante de E dans E' est continue en tout point de E

2) l'application identique $f(x) = x$ de E dans E est continue en tout point de E.

PROPOSITION 2.3.3. *Soient* (E, d) *et* (E', d') *deux espaces métriques,* A *une partie de* E, $x_0 \in \overline{A}$ *et* f *une application de* E *dans* E'. *Si* f *est continue en* x_0, *alors* $f(x_0) \in \overline{f(A)}$.

DÉMONSTRATION. Soit V' un voisinage de $f(x_0)$ dans E'; d'après la Proposition 2.3.2 $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x_0 dans E, il existe donc $y \in A \cap f^{-1}(V')$ **(pourquoi ?)**. Donc $f(y) \in f(A) \cap V'$, ce qui prouve que $f(x_0)$ est adhérent à $f(A)$. □

PROPOSITION 2.3.4. *Soient (E,d), (F,d'), $(G,d")$ trois espaces métriques, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Si f est continue en x_0 et g continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $h = g \circ f$ est une application de E dans G continue en x_0.*

DÉMONSTRATION. Posons $z_0 = h(x_0)$ et soit V un voisinage de z_0. La continuité de g en y_0 implique que $g^{-1}(V)$ est un voisinage de y_0 et la continuité de f en x_0 entraîne que $f^{-1}(g^{-1}(V)) = h^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0. □

2.3.2. Applications continues et homéomorphismes

DÉFINITION 2.3.5. Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques. Une application de E dans E' est dite *continue* si elle est continue en tout point de E.

THÉORÈME 2.3.6. *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques et f une application de E dans E'. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) f est continue.

ii) pour toute partie ouverte U' de E', $f^{-1}(U')$ est une partie ouverte de E.

iii) pour toute partie fermée F' de E', $f^{-1}(F')$ est une partie fermée de E.

iv) pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

DÉMONSTRATION. –

i)$\Rightarrow$iv) C'est la proposition 2.3.3

iv)$\Rightarrow$iii) Soit F' une partie fermée de E' et $F = f^{-1}(F')$. On a par hypothèse $f(\overline{F}) \subset \overline{f(F)} \subset \overline{F'} = F'$, donc $\overline{F} \subset f^{-1}(F') = F \subset \overline{F}$ et par suite $F = \overline{F}$, ce qui prouve que F est fermé.

iii)$\Rightarrow$ii) Soit U' une partie ouverte de E'. Comme $\complement_{E'} U'$ est fermé dans E', $f^{-1}(\complement_{E'} U') = \complement_E f^{-1}(U')$ est donc fermé, autrement dit $f^{-1}(U')$ est ouvert dans E.

ii)$\Rightarrow$i) Soit x un point de E et V' un voisinage de $f(x)$ dans E'. Il existe une partie ouverte U' de E' contenue dans V' et contenant $f(x)$ (par exemple l'intérieur de V') ; donc $x \in f^{-1}(U') \subset f^{-1}(V')$. Comme $f^{-1}(U')$ est une partie ouverte de E, il en résulte que $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x dans E. $\square$

Attention ! L'image (directe) d'une partie ouverte (resp. fermée) par une application continue n'est pas nécessairement une partie ouverte (resp. fermée) dans l'espace d'arrivée.

Exemple. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1/(1+x^2)$est continue mais $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.3.7. *Soient E, F, G des espaces métriques, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications continues. Alors l'application $g \circ f : E \to G$ est continue.*

DÉMONSTRATION. **Essayer de le montrer**. (De l'aide ?) $\square$

Exemple. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une application continue, **montrer que** $x \mapsto |f(x)|$ est une application continue de E dans $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.3.8. *Soit f une application d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (E', d'). Si f est continue, sa restriction à toute partie A de E munie de la métrique induite est continue.*

Démonstration. Appelons g la restriction de f à A. Si $a \in A$, d'après la définition de la continuité de f, pour tout voisinage V' de $g(a) = f(a)$, $f^{-1}(V')$ est un voisinage de a dans E, mais $g^{-1}(V') = f^{-1}(V') \cap A$ est alors un voisinage de a dans A. □

Si une application f de E dans E' est telle que sa restriction à A est continue, cela n'implique pas que f est continue en tout point de A. On peut seulement dire que f est continue en tout point de l'intérieur de A.

Définition 2.3.9. Une application f une application d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (E', d') est un *homéomorphisme* si elle est bijective et si f ainsi que f^{-1} sont continues.

On déduit aisément de cette définition que, si (E, d) et (E', d') sont homéomorphes, les voisinages de x dans E et de $f(x)$ dans E' se correspondent par f.

Proposition 2.3.10. *Soit E un ensemble. Deux distances d_1 et d_2 sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application*

$$\mathrm{Id}_E : (E,\ d_1) \longrightarrow (E,\ d_2)$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. **Essayer de le montrer**. (De l'aide ?) □

2.3.3. Continuité et limites

Nous allons caractériser la continuité des applications entre espaces métriques en termes de suites.

Proposition 2.3.11. *Soient* (E, d) *et* (E', d') *deux espaces métriques,* f *une application de* E *dans* E' *et a un point de* E*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) f *est continue en* a.

ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge dans* E *vers* a*, la suite* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* E' *vers* $f(a)$.

Démonstration. i)$\Rightarrow$ ii) **Essayer de le montrer**. (De l'aide ?)

ii)$\Rightarrow$i) On prouve que non i)$\Rightarrow$non ii). Pour cela on va “construire” une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a et telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$. Comme f n'est pas continue en a, il existe une boule $B(f(a), \varepsilon)$ telle que $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ ne contienne aucune boule ouverte centrée en a ; en particulier pour tout entier $n > 0$ on a $B(a, \frac{1}{2^n}) \setminus f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \neq \emptyset$. En prenant un point dans chacun de ces ensembles, on obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n > 0$, $d(a, x_n) < 1/2^n$ et $f(x_n) \notin B(f(a), \varepsilon)$. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$ (**pourquoi ?**). □

Remarque. Dans l'énoncé précédent, on peut remplacer l'assertion ii) par

ii)' Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeant vers a, la suite* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

En effet, dans la démonstration de ii)$\Rightarrow$i), en posant $y_{2p} = x_p$ et $y_{2p+1} = a$, on obtient une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Proposition 2.3.12. *Soient* (E, d) *et* (E', d') *deux espaces métriques. Une application* f *de* E *dans* E' *est continue si et seulement si l'image par* f *de toute suite convergente de* E *est une suite convergente de* E'.

Démonstration. **Essayer de le montrer**. (De l'aide ?) □

Définition 2.3.13. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, A une partie de E, $a \in \overline{A}$ et f une application de A dans E'. On dit que f a une *limite* l en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$\eta > 0$ tel que

$$f(A \cap B(a, \eta)) \subset B(l, \varepsilon).$$

Remarque. **Vérifier qu'**une fonction admet au plus une limite en a.

Remarque. Cette définition se généralise aux espaces topologiques en remplaçant les boules par des voisinages de a et de l respectivement.

2.4. Métrique produit

Soient (E_1, d_1), ..., (E_n, d_n) des espaces métriques. On peut alors définir une distance, appelée *distance ou métrique produit*, sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ en posant

$$\delta(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} d_i(x_i, y_i)$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

La boule ouverte (respectivement fermée) de centre (x, y) et de rayon r n'est autre que le produit cartésien des boules ouvertes (respectivement fermées) de centre (x_i, y_i) et de rayon r.

Exemple. $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ est un espace métrique produit.

PROPOSITION 2.4.1. *Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. Si on munit l'ensemble $E_1 \times E_2$ de la métrique produit, les projections $p_i : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_i$, $i = 1, 2$, sont continues.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte du fait que si x et y sont des points de $E_1 \times E_2$, $d_1(x_1, y_1) \leqslant \delta(x, y)$ et $d_2(x_2, y_2) \leqslant \delta(x, y)$ (**pourquoi ?**). $\square$

THÉORÈME 2.4.2. *Soient (E, d), (F_1, d_1) et (F_2, d_2) des espaces métriques et f une application de E dans $F_1 \times F_2$, muni de la distance produit δ. On note p_1 et p_2 les projections de $F_1 \times F_2$ dans F_1 et F_2 respectivement. Pour que f soit continue en un point $a \in E$, , il faut et il suffit que $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ soient continues en a.*

DÉMONSTRATION. La condition est nécessaire **(pourquoi ?)**.
La condition est suffisante. Posons $f_i = p_i \circ f$, $i = 1, 2$. Soit $\varepsilon > 0$. Il résulte de la continuité de chacune des f_i qu'il existe η_i tel que si $d(x, a) < \eta_i$ alors $d_i(f_i(x), f_i(a)) < \varepsilon$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, alors si $d(x, a) < \eta_i$ on a $\delta(f(x), f(a)) < \varepsilon$ **(pourquoi ?)**. □

Exemple. Soient u_1 et u_2 deux applications continues de E dans F_1 et F_2 respectivement et soit g une application continue de $F_1 \times F_2$ dans un espace métrique G. **Montrer que** l'application $x \mapsto g(u_1(x), u_2(x))$ est continue.

PROPOSITION 2.4.3. *Soient (E_1, d_1), (E_2, d_2), (F, d') des espaces métriques et f une application continue de $E_1 \times E_2$ dans F. Alors pour tout $a \in E_1$, l'application $y \mapsto f(a, y)$ est continue et pour tout $b \in E_2$, l'application $x \mapsto f(x, b)$ est continue.*

DÉMONSTRATION. Si f est continue, la proposition 2.3.8 implique que sa restriction à $\{a\} \times E_2$ ainsi que sa restriction à $E_1 \times \{b\}$ sont continues. Comme les applications $y \mapsto (a, y)$ et $x \mapsto (x, b)$ sont continues **(pourquoi ?)**, les applications $y \mapsto f(a, y)$ et $x \mapsto f(x, b)$ sont continues. □

Attention ! La réciproque est fausse : soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vérifier que les applications partielles $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont continues mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Remarque. Vérifier que si $(E,\ d)$ est un espace métrique, alors $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

PROPOSITION 2.4.4. *Soit $(E,\ d)$ un espace métrique. La diagonale de $E \times E$, à savoir $\Delta = \{(x,\ x) \mid x \in E\}$, est une partie fermée de $E \times E$.*

DÉMONSTRATION. Comme $\{0\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ (**pourquoi ?**) et que $\Delta = d^{-1}(0)$, il résulte de la continuité de d que Δ est fermée dans $E \times E$. □

COROLLAIRE 2.4.5. *Soient $(E,\ d)$ et $(E',\ d')$ deux espaces métriques et $f,\ g : E \longrightarrow E'$ deux applications continues. Alors $\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est une partie fermée de E.*

DÉMONSTRATION. Soit $h : E \longrightarrow E' \times E'$ l'application définie par

$$h(x) = (f(x),\ g(x)).$$

Elle est continue (**pourquoi ?**) et par conséquent l'ensemble

$$h^{-1}(\Delta) = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$$

est fermé dans E. □

COROLLAIRE 2.4.6. *Si f est une application continue d'un espace métrique E dans un espace métrique F, le graphe $\mathrm{Gr}(f)$ de f est une partie fermée de $E \times F$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que $\mathrm{Gr}(f) = \{(x,\ y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$; or les projections de $E \times F$ sur E et sur F sont continues. Il résulte du corollaire précédent que $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé □

Attention ! La réciproque de ce corollaire est fausse en général :

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$. Le graphe de f est la réunion de la courbe $xy - 1 = 0$ et du point $(0,\ 0)$. **Montrer que** $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé et que f n'est pas continue en 0.

CHAPITRE 3

Espaces compacts

Dans l'étude du cas réel, nous avons dégagé deux propriétés d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Ceci nous amène à introduire une famille particulière d'espaces métriques qui "ressemblent" à un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

3.1. Définition de la compacité.

DÉFINITION 3.1.1. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. On appelle *recouvrement ouvert* de A une famille $(\mathscr{O}_i)_{i \in I}$ de parties ouvertes de E telles que $\bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i \supset A$.

On dit que le recouvrement est *fini* si l'ensemble I des indices est fini.

On appelle *recouvrement extrait* du recouvrement $(\mathscr{O}_i)_{i \in I}$ de A un recouvrement $(\mathscr{O}_i)_{i \in J}$ de A avec $J \subset I$.

DÉFINITION 3.1.2. On dit qu'un espace métrique (E, d) est *compact* si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini. Cette propriété concernant les recouvrements ouvert s'appelle *la propriété de Borel-Lebesgue*.

Remarque. Cette définition peut s'étendre aux espaces topologiques.

Exemples.

- Tout espace métrique fini est compact.
- Tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$, muni de la distance induite par la distance usuelle, est compact.
- Si (X, d) est un espace métrique et si (x_n) est une suite de points de X qui converge vers x, **montrer que**

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\},$$

muni de la métrique induite, est un espace compact.

PROPOSITION 3.1.3. *Soit (E, d) un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) E est compact.

ii) Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de parties fermés de E telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, il existe $J \subset I$ fini *tel que $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. i)$\Longrightarrow$ ii). Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de parties fermés de E telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$; si on note $\mathscr{O}_i = \complement_E F_i$, $\mathscr{O}_i$ est un ouvert de E et on a

$$E = \complement_E \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i;$$

puisque E est compact, il existe $J \subset I$ *fini* tel que $\bigcup_{i\in J} \mathscr{O}_i = E$. En prenant le complémentaire, on obtient

$$\emptyset = \complement_E \left(\bigcup_{i\in J} \mathscr{O}_i\right) = \bigcap_{i\in J} \complement_E \mathscr{O}_i = \bigcap_{i\in J} F_i.$$

ii)$\Longrightarrow$ i) La démonstration est analogue.
S'en convaincre.

$\square$

COROLLAIRE 3.1.4. *Soit* (E, d) *un espace métrique compact et soit* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de parties fermées* non vides *emboîtées (c'est à dire* $F_n \supset F_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*). Alors*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire ; E étant compact, il existerait alors $A \subset \mathbb{N}$ fini tel que $\bigcap_{n\in A} F_n = \emptyset$. A cause de la condition d'emboîtement, on aurait $\bigcap_{n\in A} F_n = F_{\sup(A)} = \emptyset$ (**s'en convaincre !**), ce qui contredit l'une des hypothèses. $\square$

THÉORÈME 3.1.5. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) E *est compact (*E *possède la propriété de Borel-Lebesgue).*

ii) De toute suite de points de E*, on peut extraire une sous-suite convergente (Propriété de Bolzano-Weierstrass).*

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii). Soit (x_n) une suite de points de E et posons $F_n = \overline{\left\{x_p \mid p \geqslant n\right\}}$. On a évidemment $F_n \neq \emptyset$ et $F_n \supset F_{n+1}$, donc d'après le corollaire 11.1.4 $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Si $\xi \in F$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $B(\xi, \varepsilon) \cap \left\{x_p \mid p \geqslant n\right\} \neq \emptyset$; ainsi ξ est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), et on sait qu'on peut dans ce cas extraire de (x_n) une sous-suite qui converge vers ξ. $\square$

ii) $\Longrightarrow$ i). Cette partie est nettement plus difficile. On montre d'abord

LEMME 3.1.6. *Soit* (E, d) *un espace métrique possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass. Si* $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement ouvert de* E*, il existe un nombre réel* $\lambda > 0$ *(appelé le nombre de Lebesgue du recouvrement) tel que, pour tout* $x \in E$ *il existe* $i \in I$ *vérifiant* $B(x, \lambda) \subset \mathscr{O}_i$*.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, il existerait un recouvrement ouvert $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ et une suite (x_n) de points de E telle que $B(x_n, 1/2^n)$ ne soit contenue dans aucun des $\mathscr{O}_i$. Soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite extraite de cette suite et convergeant vers $\xi \in E$. Soit $i_0 \in I$ tel que $\xi \in \mathscr{O}_{i_0}$; puisque $\mathscr{O}_{i_0}$ est un ouvert de E, il contient une boule ouverte non vide $B(\xi, \rho)$ et il existerait un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$ on aurait $x_{\varphi(n)} \in B(\xi, \rho/2)$. Comme $B(x_{\varphi(n)}, \rho/2) \subset B(\xi, \rho) \subset \mathscr{O}_{i_0}$, on obtient une contradiction dès que $\rho/2 > 1/2^n > 1/2^{\varphi(n)}$. □

LEMME 3.1.7. *Soit* (E, d) *un espace métrique possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass. Alors pour tout* $\rho > 0$*, il existe un ensemble fini* $\{x_1, \cdots, x_n\}$ *de points de* E *tel que*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \rho)$$

(cette propriété s'appelle la propriété des réverbères*).*

DÉMONSTRATION. Raisonnons encore par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, il existerait $\rho > 0$ tel qu'on ne puisse pas recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon ρ. Grâce au Lemme de Zorn, il existerait une suite (x_n) d'éléments de E telle que $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \rho)$ pour tout $n \geqslant 1$. D'une telle suite, on ne peut pas extraire une sous-suite convergente (**pourquoi ?**).

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.

Soit $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Puisque E possède la propriété de Bolzano-Weierstrass, le lemme 2.0.16 fournit un nombre de Lebesgue λ pour ce recouvrement : si $x \in E$, il existe $i_x \in I$ tel que $B(x, \lambda) \subset \mathscr{O}_{i_x}$. D'après le lemme 2.0.17, il existe des points $x_1, \cdots, x_n \in E$ tels que E soit union des boules $B(x_k, \lambda)$ et donc $E = \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{O}_{i_{x_k}}$. On a donc extrait du recouvrement ouvert donné un recouvrement fini. □

Remarque. Le théorème étant acquis, le résultat du Lemme 3.1.7 se traduit par

PROPOSITION 3.1.8. *Un espace métrique compact (E, d) possède la propriété des réverbères (quand on veut faire "chic" on dit que E est* précompact*).*

DÉMONSTRATION. **Démontrer** cette propriété à l'aide de la définition de la compacité. □

On en déduit immédiatement que tout espace métrique compact est *borné* et par conséquent $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

COROLLAIRE 3.1.9. *Tout espace métrique compact E est séparable (c'est à dire contient une partie dénombrable partout dense).*

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une partie finie A_n de E telle que $E = \bigcup_{x \in A_n} B(x, 1/2^n)$. L'ensemble $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ répond à la question. □

COROLLAIRE 3.1.10. *Si E et F sont deux espaces métriques compacts, alors $E \times F$ est aussi un espace métrique compact.*

DÉMONSTRATION. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $E \times F$. Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge dans E. La suite $(y_{\varphi(n)})$ de points de F possède elle aussi une sous-suite convergente $(y_{\varphi(\psi(n))})$. Alors $(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))})$ est une sous-suite de $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $E \times F$. □

PROPOSITION 3.1.11. *Soit (E, d) un espace métrique compact et (x_n) une suite d'éléments de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) (x_n) *est convergente.*

ii) (x_n) *a une unique valeur d'adhérence.*

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii). Si (x_n) converge vers l, alors l est la seule valeur d'adhérence de (x_n) (**s'en convaincre !**).

ii)$\Longrightarrow$ i). Soit λ l'unique valeur d'adhérence de (x_n). Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $x_n \in B(\lambda, \varepsilon)$ pour tout $n \geqslant N$. Si ce n'était pas le cas, pour un certain $\varepsilon > 0$, on pourrait construire une sous-suite de (x_n) qui ne rencontrerait pas $B(\lambda, \varepsilon)$ et extraire de cette sous-suite une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ dont la limite, qui est une valeur d'adhérence de (x_n), serait nécessairement différente de λ. D'où une contradiction. □

3.2. Parties compactes.

DÉFINITION 3.2.1. Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de E est compacte si l'espace métrique (A, d_A) est compact.

PROPOSITION 3.2.2. *Soit (E, d) un espace métrique. Toute partie compacte A de E est fermée et bornée.*

DÉMONSTRATION. On a vu que tout espace métrique compact est borné, donc si A est une partie compacte de E, A est bornée.

Soit maintenant $\xi \in \overline{A}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\widetilde{B}(\xi, 1/n) \cap A$ est une partie fermée non vide de A et donc $\emptyset \neq \bigcap_{n>0}(\widetilde{B}(\xi, 1/n)) \cap A = \{\xi\} \cap A$; il en résulte que $\xi \in A$. □

A ce stade, il est raisonnable de se demander si ces conditions entraînent, en général, que A est une partie compacte. La réponse est non :

Exemple. Soit E un ensemble infini muni de la distance discrète. Les parties compactes de E sont les parties finies alors que toute partie de E est fermée et bornée.

On a néanmoins deux résultats importants.

PROPOSITION 3.2.3. *Soit E un espace topologique compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) F est une partie fermée de E.

ii) F est une partie compacte de E.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que i) $\Longrightarrow$ ii) (**pourquoi ?**). Soit donc F une partie fermée de E et $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement de F par des parties ouvertes de E. Alors avec $\mathscr{O}_\omega = \complement_E F$, où $\omega \notin I$, $(\mathscr{O}_j)_{j\in I\cup\{\omega\}}$ est un recouvrement ouvert de E dont on peut extraire un recouvrement fini de la forme $(\mathscr{O}_j)_{j\in J\cup\{\omega\}}$, où J est une partie finie de I. Il en résulte que $F \subset \bigcup_{j\in J} \mathscr{O}_j$. □

PROPOSITION 3.2.4. *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ (muni de l'une des distances d_1, d_2 ou d_∞) sont les parties fermées et bornées.*

DÉMONSTRATION. Pour $n = 1$, c'est le cas de $\mathbb{R}$, les trois distances coïncident avec la distance usuelle.

Pour $n > 1$, on suppose $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞. Si A est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$, il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $A \subset [-M, M]^n$. Mais $[-M, M]^n$ est compact comme produit d'espaces compact (cf. Corollaire 3.1.10) et A est fermé dans $[-M, M]^n$, on conclut alors que A est compacte.

Si $\mathbb{R}^n$ est muni de la distance d_1 (ou d_2), on utilise le fait que cette distance est topologiquement équivalente à d_∞. □

En conclusion, on peut se demander pour quels espaces (par exemple les espaces vectoriels normés) les parties compactes sont-elles les parties fermées et bornées, ou quelles sont les parties compactes de $\mathscr{C}[a, b]$ muni de la norme de la convergence uniforme ? Nous y reviendrons ultérieurement.

3.3. Compacité et continuité.

THÉORÈME 3.3.1. *Soient E et F des espaces métriques. Si E est compact et si $f : E \longrightarrow F$ est une application continue, alors $f(E)$ est une partie compacte de F.*

DÉMONSTRATION. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(E)$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(x_n)$. Puisque l'espace E est compact, on peut extraire une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. L'application f étant continue, la suite $(y_{n_k} = f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente **(pourquoi ?)** et par conséquent $f(E)$ est compact. $\square$

Application. Si E est compact et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(E)$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$. Autrement dit f est bornée et atteint $\sup_{x\in e} f(x)$ et $\inf_{x\in E} f(x)$.

Exemple.Soient E un espace métrique, $A,\ B \subset E$ deux parties compactes. **Vérifier que**

$$A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ d(A,\ B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,\ y) > 0.$$

COROLLAIRE 3.3.2. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue* bijective. *Si E est compact, alors f est un homéomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Notons f^{-1} l'application réciproque de f. Si G est une partie fermée, donc compacte de E, alors $(f^{-1})^{-1}(G) = f(G)$ est une partie compacte, donc fermée de F. Ceci démontre la continuité de f^{-1}. $\square$

PROPOSITION 3.3.3. *Soit E un espace métrique compact et $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans un espace métrique F. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) f est continue.

ii) Le graphe G_f de f est une partie compacte de $E \times F$.

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii) Si f est continue, il en est de même de $\Phi : x \mapsto (x, f(x))$. Alors $G_f = \Phi(E)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.

ii) $\Longrightarrow$ i). Soit $\pi : G_f \to E$ l'application définie par $\pi(x, f(x)) = x$. C'est une application continue bijective ; puisque G_f est compact, π est un homéomorphisme. Soit π_2 la projection de $E \times F$ sur F. La relation $f = \pi_2 \circ \pi^{-1}$ montre alors que f est continue. $\square$

Si cette démonstration vous paraît "inimaginable", **essayez d'en imaginer** une autre "avec des suites".

Remarque. Dans les résultats précédents, on aurait pu remplacer "espace métrique" par "espace topologique séparé". Ce n'est pas le cas pour l'énoncé suivant.

THÉORÈME 3.3.4. *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et on suppose que E est compact. Alors toute application continue $f : E \to E'$ est uniformément continue.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en tout point de E, pour chaque $x \in E$, il existe $\eta_x > 0$ tel que si $y \in B(x, \eta_x)$ alors $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$. Comme $(B(x, \eta_x/2))_{x\in E}$ est un recouvrement ouvert de E qui est compact, il existe des points $x_1, \cdots, x_n \in E$ tels que $\left(B(x_k, \eta_{x_k}/2)\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ soit encore un recouvrement de E. Posons $\eta = \inf_{1\leqslant k\leqslant n}(\eta_{x_k}/2)$ et soient $y_1, y_2 \in E$ tels que $d(y_1, y_2) < \eta$; il existe un indice $k_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $y_1, y_2 \in B(x_{k_0}, \eta_{x_{k_0}})$ (**pourquoi ?**) et par suite $d'(f(y_1), f(y_2)) < \varepsilon$ grâce à l'inégalité triangulaire. $\square$

Essayez d'imaginer une autre démonstration de ce théorème "avec des suites". (De l'aide ?)

CHAPITRE 4

Espaces connexes

Le but de ce chapitre est de donner un sens, pour un espace métrique, à la notion "en un seul morceau" ; la définition est un peu surprenante et nous verrons dans la suite qu'il ne faut pas croire que l'intuition soit un critère absolu !

4.1. Définition et propriétés.

DÉFINITION 4.1.1. On dit qu'un espace métrique (E, d) est connexe si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.

Remarque. Cette définition s'étend (sans changement) aux espaces topologiques.

PROPOSITION 4.1.2. *Soit (E, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) E est connexe.
ii) Si E est union de deux parties ouvertes disjointes, l'une des deux est vide.
iii) Si E est union de deux parties fermées disjointes, l'une des deux est vide.
iv) Toute application continue de E dans l'espace discret $\{0, 1\}$ est constante.

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii). Supposons que $E = U_1 \cup U_2$, où U_1 et U_2 sont deux ouverts disjoints de E. Comme $\complement_E U_2 = U_1$, alors U_1 est ouvert et fermé dans E d'où il résulte que soit $U_1 = \emptyset$ soit $U_1 = E$ auquel cas $U_2 = \emptyset$.

ii) $\Longrightarrow$ iii). Si E est union de deux fermés disjoints F_1 et F_2, alors F_1 et F_2 sont aussi des parties ouvertes de E.

iii) $\Longrightarrow$ iv). Soit $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Alors $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont deux parties fermées disjointes de E dont l'union est égale à E ; l'une d'elles est donc vide. Si $f^{-1}(0) = \emptyset$, alors $f = 1$, sinon on a $f = 0$.

iv) $\Longrightarrow$ i). Soit A une partie ouverte et fermée de E. La fonction caractéristique de A, $\chi_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue (**pourquoi ?**). Elle est donc constante ce qui implique $A = \emptyset$ ou $A = E$. $\square$

Exemples.

– L'ensemble $\mathbb{R}$ est un espace métrique connexe pour la métrique usuelle.
– L'ensemble $\mathbb{Q}$, muni de sa métrique usuelle, n'est pas connexe car

$$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\right\}.$$

– Un espace E, muni de la distance discrète, non vide et non réduit à un point n'est pas connexe.

Remarque. En général, il est plus facile de montrer qu'un espace métrique n'est pas connexe que le contraire.

Cependant avec la notion suivante :

DÉFINITION. *Soit (E, d) un espace métrique et soit $x, y \in E$. On appelle ε-chaîne reliant x à y une séquence $x_0, ..., x_n$ de points de E tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout*

$i = 1, \cdots, n$. *On dit que* (E, d) *possède la "propriété des* ε*-chaînes" si pour tout* $x, y \in E$ *et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une* ε*-chaîne reliant* x *à* y

on a, dans le cas d'un espace métrique compact :

PROPOSITION 4.1.3. *Un espace métrique compact* (E, d) *qui possède "la propriété des* ε*-chaînes" est connexe.*

DÉMONSTRATION. Montrons, ce qui est équivalent, que si E n'est pas connexe, alors il existe $x_0, y_0 \in E$ et ε_0 tels qu'il n'existe pas d'ε_0-chaîne reliant x_0 à y_0.

Soient U_1 et U_2 deux ouverts disjoints non vides de E qui forment un recouvrement de E. Comme E est compact, on a $\delta = d(U_1, U_2) > 0$ **(pourquoi ?)**.Si on choisit des points $x_0 \in U_1$ et $y_0 \in U_2$, il n'existe pas de $\frac{\delta}{2}$-chaîne x_0, ..., x_n reliant x_0 à y_0 (on montre par récurrence que tous les éléments x_i de la séquence sont dans U_1). □

Remarque L'hypothèse de compacité est essentielle. L'espace métrique $\mathbb{Q}$, qui n'est pas compact, possède "la propriété des ε-chaînes" sans pour autant être connexe.

COROLLAIRE. *Tout intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$*, muni de la métrique usuelle, est un espace métrique connexe.*

Remarque Une autre démonstration de ce résultat est donnée dans l'étude de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 4.1.4. *Soient* (E_1, d_1) *et* (E_2, d_2) *deux espaces métriques non vides. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) E_1 *et* E_2 *sont connexes.*

ii) $E_1 \times E_2$ *est connexes.*

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii). Soit A une partie ouverte et fermée non vide de $E_1 \times E_2$. Donnons-nous un point $(x_0, y_0) \in A$.

L'application $\iota : E_1 \longrightarrow E_1 \times E_2$ définie par $\iota(x) = (x,\, y_0)$ est continue ; donc $\iota^{-1}(A) = \{x \in E_1 \mid (x,\, y_0) \in A\}$ est une partie ouverte et fermée non vide de E_1 d'où $\iota^{-1}(A) = E_1$, autrement dit $E_1 \times \{y_0\} \subset A$. Si on se fixe maintenant un point $x \in E_1$, on démontre de la même façon que $\{x\} \times E_2 \subset A$. Finalement on a bien $A = E_1 \times E_2$.

ii) $\Longrightarrow$ i). Si E_1 n'est pas connexe, il existe Ω_1 ouvert et fermé non vide dans E_1 différent de E_1. Alors $\Omega_1 \times E_2 = p_1^{-1}(\Omega_1)$ est une partie ouverte et fermée non vide de $E_1 \times E_2$ différente de $E_1 \times E_2$ (**s'en convaincre**). $\square$

4.2. Parties connexes

Définition 4.2.1. Dans un espace métrique $(E,\, d)$, on dit qu'une partie A est connexe si l'espace métrique $(A,\, d_A)$ est connexe.

Remarque. Ceci se généralise immédiatement aux espaces topologiques : *on dira qu'une partie A d'un espace topologique E est connexe si A, muni de la topologie induite, est connexe.*

Caractérisation d'une partie connexe d'un espace métrique E

Une partie $A \subset E$ est connexe si et seulement si, pour tout couple $(\widetilde{U_1},\, \widetilde{U_2})$ d'ouverts disjoints de E tels que $A \subset \widetilde{U_1} \cup \widetilde{U_2}$, on a soit $A \cap \widetilde{U_1} = \emptyset$ soit $A \cap \widetilde{U_2} = \emptyset$.

Démonstration. Supposons A connexe et soit $(\widetilde{U_1},\, \widetilde{U_2})$ tel que $A \subset \widetilde{U_1} \cup \widetilde{U_2}$. Les $U_i = A \cap \widetilde{U_i}$ sont des ouverts disjoints de A ; comme A est connexe, on a soit $U_1 = \emptyset$ soit $U_2 = \emptyset$.

Réciproquement, soit A une partie non connexe de E. Il existe deux ouverts disjoints non vides U_1, U_2 de A dont la réunion est égale à A. Si un point $x \in A$ est dans U_i $(i = 1,\, 2)$, posons $\varepsilon_x = d(x,\, A \setminus U_i)$, on a $\varepsilon_x > 0$ (**pourquoi ?**) et $U_i = \bigcup_{x \in U_i} B^A(x,\, \varepsilon_x)$. Notons $\widetilde{U_i} = \bigcup_{x \in U_i} B^E(x,\, \varepsilon_x/2)$. On a alors $\widetilde{U_1} \cap \widetilde{U_2} = \emptyset$ (s'en convaincre) et $A \cap \widetilde{U_i} = U_i$ pour $i = 1,\, 2$. $\square$

Exemple très important. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.2. *Soit (E, d) un espace métrique, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de E telles que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est une partie connexe de E.*

Démonstration. Soit $f : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Alors $f_{|A_i}$ est constante et puisque $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, f est constante. $\square$

Proposition 4.2.3. *Soit (E, d) un espace métrique et $A_1,\ldots, A_n$ des parties connexes de E telles que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout i. Alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est une partie connexe de E.*

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons qu'il soit vrai pour un entier $n \geqslant 1$; $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est connexe et de plus $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} \supset A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, donc $A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}$ est connexe. $\square$

Proposition 4.2.4. *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie connexe de E. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Démonstration. Soient U_1 et U_2 deux ouverts disjoints tels que $B \subset U_1 \cup U_2$. On sait que soit $U_1 \cap A = \emptyset$ soit $U_2 \cap A = \emptyset$. Supposons par exemple que $U_1 \subset E \setminus A$; comme U_1 est un ouvert de E, on a $U_1 \subset \mathrm{Ext} A$ et donc $U_1 \cap B = \emptyset$. $\square$

Cette proposition anodine va nous permettre de construire une partie connexe "bizarre" de $\mathbb{R}^2$.

Considérons d'abord le "peigne" P_1 défini par

$$\mathbb{R} \times \{1\} \cup \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\} \times [0, 1].$$

Il s'agit d'une partie connexe de $\mathbb{R}^2$ comme union de parties connexes $(\mathbb{R}\times\{1\}\cup\{x\}\times[0, 1])$ dont l'intersection n'est pas vide.

Considérons maintenant le “peigne” P_2 défini par

$$\mathbb{R} \times \{-1\} \cup \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x + \sqrt{2}\} \times [-1, 0]$$

qui est aussi une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

$P = P_1 \cup P_2$ est-il en un seul morceau ? Intuitivement on répondrait non et pourtant P est connexe !

Pour le voir, munissons P de la métrique usuelle de $\mathbb{R}^2$; P_i , $i = 1, 2$, ainsi que son adhérence $\overline{P_i}^P$ dans P, sont des parties connexes de P et $\overline{P_1}^P \cap \overline{P_2}^P \neq \emptyset$. Donc P est connexe.

4.3. Espaces connexes et applications continues. Espaces connexes par arcs

THÉORÈME 4.3.1. *Soit (E, d) un espace métrique connexe et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Alors $f(E)$ est une partie connexe de F.*

DÉMONSTRATION. Soient U_1 et U_2 deux parties ouvertes disjointes non vides de F dont l’union contient $f(E)$; alors $f^{-1}(U_1)$ et $f^{-1}(U_2)$ sont deux ouverts disjoints de E qui recouvrent E et par conséquent l’un des deux est vide. Ceci signifie que soit $U_1 \cap f(E) = \emptyset$, soit $U_2 \cap f(E) = \emptyset$. □

Remarque. Si E est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, c’est le Théorème des valeurs intermédiaires

DÉFINITION 4.3.2. On dit qu’une partie A d’un espace métrique (E, d) est connexe par arcs si, pour tout $x, y \in A$ il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ (on dit que γ est un arc dans A joignant x à y).

PROPOSITION 4.3.3. *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit E un espace connexe par arcs. Si E est vide c'est vrai. Sinon soit $x \in E$ et pour tout $y \in E$, désignons par $\gamma_{x,y}$ un arc joignant x à y. On a alors

$$E = \bigcup_{y \in E} \gamma_{x,y}([0,\ 1]).$$

Puisque les $\gamma_{x,y}([0,\ 1])$ sont connexes et que tous contiennent le point x, on en déduit que E est connexe. $\square$

Remarque. En général la réciproque est fausse. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle, montrons que *le "double peigne"* $P = P_1 \cup P_2$ n'est pas connexe par arcs. Soit en effet γ un arc dans P tel que $\gamma(0) \in P_1$; posons $\gamma(t) = (x(t),\ y(t))$ et $\Omega = \left\{t \in [0,\ 1] \,\middle|\, \gamma(t) \in P_1\right\}$ .On a $\Omega \neq \emptyset$ et puisque $[0,\ 1]$ est connexe, si $\Omega \neq [0,\ 1]$ sa frontière n'est pas vide. Soit $s \in \partial\Omega$; en utilisant la continuité de $t \mapsto y(t)$ on voit que $y(s) = 0$. Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que $|t - s| < \eta$ implique $|y(t)| < 1/2$. L'image de $]s - \eta,\ s + \eta[\cap [0,\ 1]$ par l'application $t \mapsto x(t)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (pourquoi ?) inclus dans $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{Q} + \sqrt{2})$ et elle est donc réduite à un point. Par conséquent $]s - \eta,\ s + \eta[\cap [0,\ 1]$ est, soit inclus dans Ω, soit inclus dans le complémentaire de Ω ce qui implique que s est soit un point intérieur à Ω soit un point extérieur à Ω . Dans tous les cas on aboutit à la conclusion absurde que $s \notin \partial\Omega$. Ainsi $\Omega = [0,\ 1]$ et par suite $\gamma(1) \in P_1$, ce qui est absurde.

Il y a néanmoins un cas où les deux notions coïncident.

PROPOSITION 4.3.4. *Soit* $(E,\ \|\bullet\|)$ *un espace vectoriel normé et* U *une partie ouverte de* E. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) U *est une partie connexe de* E.

ii) U *est une partie de* E *connexe par arcs.*

DÉMONSTRATION. ii) $\Longrightarrow$ i). C'est la Proposition 4.3.3.

i) $\Longrightarrow$ ii). Soit $x \in U$ et considérons

$$\Omega_x = \{y \in U \mid \text{il existe un arc joignant } x \text{ et } y\}.$$

On a $x \in \Omega_x$. Si $y \in \Omega_x$, d'une part il existe un arc continu $\gamma : [0, 1] \to U$ joignant x à y et d'autre part il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset U$. Si $z \in B(y, \varepsilon)$, on construit alors un arc continu $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to U$ joignant x à z par la formule

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ (2t-1)z + (2-2t)y & \text{si} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases};$$

ainsi $z \in \Omega_x$ et par conséquent $B(y, \varepsilon) \subset \Omega_x$. On a montré que Ω_x est une partie ouverte de U.

De façon analogue, on montre que Ω_x est une partie fermée de U : si $z \in U$ est adhérent dans U à Ω_x, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon) \subset U$ et on choisit $y \in B(z, \varepsilon/3) \cap \Omega_x$; alors on aura $z \in B(y, 2\varepsilon/3) \subset U$. □

4.4. Composantes connexes

Si E est un espace métrique "en plusieurs morceaux", on se propose de définir les "morceaux".

DÉFINITION 4.4.1. Soit E un espace métrique. On dit qu'une partie A est une *composante connexe* de E si c'est une partie connexe maximale de E, autrement dit A est une partie connexe de E qui n'est contenue strictement dans aucune partie connexe de E.

Exemples. Si E est connexe, E est son unique composante connexe.
Si E est un espace discret, ses composantes connexes sont les ensembles $\{x\}$, $x \in E$.
Remarque. Toute composante connexe de E est une partie fermée de E.

LEMME 4.4.2. *Deux composantes connexes distinctes d'un espace métrique E sont disjointes.*

Démonstration. Soient A_1 et A_2 deux composantes connexes de E. Si on a $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, alors $A_1 \cup A_2$ est une partie connexe de E et par définition on a donc

$$A_1 = A_1 \cup A_2 = A_2.$$

□

Lemme 4.4.3. *Soit E un espace métrique et $x \in E$. Il existe une unique composante connexe de E contenant x, qui s'appelle la composante connexe de x dans E.*

Démonstration. La réunion de toutes les parties connexes de E contenant x est une partie connexe de E qui est maximale (**pourquoi ?**). □

Proposition 4.4.4. *Tout espace métrique E est la réunion disjointe de ses composantes connexes.*

Démonstration. D'après le lemme 4.4.3, E est la réunion de ses composantes connexes et d'après le lemme 4.4.2 deux composantes connexes distinctes sont disjointes. □

Lemme 4.4.5. *Soit E un espace vectoriel normé et U une partie ouverte de E. Alors les composantes connexes de U sont des parties ouvertes de E.*

Démonstration. Soit A une composante connexe de U et soit $z \in A$. Puisque U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon) \subset U$; mais $B(z, \varepsilon)$ étant une partie connexe de U (**pourquoi ?**), on a $A \cup B(z, \varepsilon) \subset A$ et donc $B(z, \varepsilon) \subset A$. Il en résulte que A est une partie ouverte de E. □

Proposition 4.4.6. *Toute partie ouverte non vide de $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, si U est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors U est la réunion disjointes de ses composantes connexes A_i, $i \in I$. D'après la caractérisation des parties connexes de $\mathbb{R}$ et le lemme 4.4.5, chacun des A_i est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Donc $A_i \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$; d'après l'axiome du choix on peut construire une application $f : I \longrightarrow \mathbb{Q}$ telle que $f(i) \in A_i \cap \mathbb{Q}$. Cette application est injective car $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, donc I est dénombrable. $\square$

Attention ! Il ne faut pas espérer un résultat analogue pour les parties fermées de $\mathbb{R}$.

CHAPITRE 5

Espaces métriques complets

5.1. Définitions et premières propriétés

DÉFINITION 5.1.1. Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout $p, q \geqslant N$ on a $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Exemples. 1) **Vérifier que** si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans E, alors elle est de Cauchy.
2) Dans $]0,+\infty[$ muni de la distance usuelle, **vérifier que** la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, mais n'est pas convergente.

DÉFINITION 5.1.2. On dit qu'un espace métrique (E,d) est *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E.

Exemples. 1) $(\mathbb{R}, usuel)$ est un espace métrique complet.
2) $(\mathbb{Q}, usuel)$ n'est pas un espace métrique complet (**pourquoi ?**)
3) Montrer que tout ensemble E muni de la métrique discrète est complet.

Attention 1)Un espace métrique homéomorphe à un espace métrique complet n'est pas nécessairement complet. La fonction

$$\mathrm{Arctg} : (\mathbb{R}, usuel) \to \left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, usuel \right)$$

est un homéomorphisme ; mais $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui ne converge pas.

2) L'image d'une suite de Cauchy par un homémorphisme n'est pas une suite de Cauchy. Par exemple, si

$$\Phi :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$$

est définie par $\Phi(x) = 1/x$, l'image de la suite de Cauchy $(1/n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas une suite de Cauchy.

PROPOSITION 5.1.3. *Soit (E, d) un espace métrique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) E est complet.

2) Pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés emboîtés ($F_{n+1} \subset F_n$) non vides de E dont le diamètre tend vers 0, on a

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Remarques 1) Si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, on peut remarquer que puisque $\mathrm{diam} F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est réduit à un point.

2) La condition sur le diamètre semble superflue. On imagine naïvement que si les fermés sont “plus gros” cela sera encore vrai, mais c'est faux !

Par exemple dans $\mathbb{R}$, prenez $F_n = [n, +\infty[$.

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii). Grâce à l'axiome du choix, on choisit des points $x_n \in F_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi obtenue est de Cauchy (**pourquoi ?**), donc converge, par hypothèse, vers un point $\xi \in E$. Comme $(x_p)_{p\geqslant n}$ est une suite d'éléments de F_n, on a $\xi \in F_n$ (**pourquoi ?**) et par conséquent $\xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

ii) $\Longrightarrow$ i). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E et posons $F_n = \overline{\left\{x_p | p \geqslant n\right\}}$. On a $F_{n+1} \subset F_n$ et $\mathrm{diam} F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (**pourquoi ?**) ; d'après l'hypothèse, $\bigcap_n F_n$ est réduit à un point ξ qui est donc une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Du fait que $d(x_n, \xi) \leqslant \mathrm{diam} F_n$, on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ. $\square$

COROLLAIRE 5.1.4. *Un espace métrique compact (E, d) est complet.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le Corollaire 3.1.4

$\square$

THÉORÈME 5.1.5. *Si (E, d) est un espace métrique, les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) E est compact.
ii) E est complet et possède la propriété des réverbères.

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii). C'est le corollaire ci-dessus.

ii)$\Longrightarrow$ i). On commence par prouver que la propriété des réverbères implique que de toute suite on peut extraire une suite de Cauchy. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si on recouvre E par une famille de boules de rayon $1/2$, l'une de ces boules contient x_n pour une infinité de valeurs de n et on peut donc extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les points se trouvent à des distances mutuelle $\leqslant 1$.

Par récurrence sur l'entier p, on construit ainsi une suite $(\varphi_p)_{p\geqslant 1}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$d(x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_p(n)}, x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_p(n')}) < \frac{1}{p}$$

pour tout $n, n' \in \mathbb{N}$.

Par un procédé diagonal, on construit alors une application strictement croissante $\psi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ par $\psi(n) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$. La suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_{n)_{n\in\mathbb{N}}}$ qui vérifie $d(x_{\psi(p)}, x_{\psi(q)}) \leqslant 1/p$ si $p \leqslant q$; c'est donc une suite de Cauchy dans E qui converge puisque E est complet. $\square$

Proposition 5.1.6. *Soient (E_1, d_1), (E_2, d_2) deux espaces métriques non vides et $E = E_1 \times E_2$ l'espace métrique produit. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) E_1 et E_2 sont complets.

ii) E est complet.

Démonstration. i) $\Longrightarrow$ ii). Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E_1 et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E_2. Par hypothèse $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\xi \in E_1$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\eta \in E_2$, donc $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\xi, \eta) \in E$.

ii)$\Longrightarrow$ i). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E_1 et $y_0 \in E_2$. Alors $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E (**pourquoi ?**), elle converge donc vers un point (ξ, y_0) et par conséquent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ. Donc E_1 est complet et on procède de même avec E_2. $\square$

Application. $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique produit est complet.. **—**

5.2. Parties complètes.

Définition 5.2.1. Une partie A d'un espace métrique (E, d) est une *partie complète* si l'espace métrique (A, d_A) est complet.

Proposition 5.2.2. *Si A est une partie complète d'un espace métrique (E, d), alors A est une partie fermée de E.*

Démonstration. $\xi \in \overline{A}$ et notons $F_n = \widetilde{B}(\xi, 1/n) \cap A$. On a alors $F_n \neq \emptyset$, $F_{n+1} \subset F_n$ et $\operatorname{diam} F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (**pourquoi ?**). Comme A est complet, on sait que $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$, or $\bigcap_n F_n = \{\xi\}$ donc $\xi \in A$. □

Corollaire 5.2.3. *Soit (E, d) un espace métrique complet et $A \subset E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) A est complet.

ii) A est fermée dans E.

Démonstration. On vient de montrer que i) $\Longrightarrow$ ii).

Démontrons ii) $\Longrightarrow$ i). Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties fermés emboîtées non vides de A dont les diamètres tendent vers 0. Les F_n sont fermés dans E (**pourquoi ?**), donc $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$ car E est complet. □

5.3. Espaces complets et applications continues.

Définition 5.3.1. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$ une application. On dit que f est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ vérifiant $d(x, y) < \eta$ on a $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Proposition 5.3.2. *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et soit $f : E \longrightarrow E'$ une application uniformément continue. Alors*

i) si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E'.

ii) si une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E vérifie $\operatorname{diam} A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *on a aussi* $\operatorname{diam} f(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

DÉMONSTRATION. **Ecrire la démonstration.** $\square$

COROLLAIRE 5.3.3. *Soit $f : E \to F$ une application continue bijective telle que f^{-1} soit uniformément continue. Si E est complet, alors F est complet.*

DÉMONSTRATION. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F, alors $(f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E et elle converge donc vers un point $\xi \in E$. Comme f est continue et que $y_n = f(f^{-1}(y_n))$, il en résulte que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\xi) \in F$. $\square$

COROLLAIRE 5.3.4. *Soit E un ensemble et soient d_1 et d_2 deux distances sur E. S'il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $x, y \in E$ on a*

$$Ad_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant Bd_1(x,y),$$

alors (E, d_1) est complet si et seulement si (E, d_2) est complet.

DÉMONSTRATION. C'est élémentaire. **Prouvez-le !** $\square$

Application. $\mathbb{R}^n$ est complet pour chacune des distances d_1, d_2, d_∞.

THÉORÈME 5.3.5. *Soit (E, d) un espace métrique et (E', d') un espace métrique complet. Si $A \subset E$, alors toute application uniformément continue $f : A \to E'$ se prolonge de manière unique en une application continue $\overline{f} : \overline{A} \to E'$. De plus un tel prolongement est uniformément continu.*

DÉMONSTRATION. L'unicité est immédiate : supposons que $\overline{f}_1$ et $\overline{f}_2$ soient deux prolongements de f. Alors $\left\{x \in \overline{A} \middle| \overline{f}_1(x) = \overline{f}_2(x)\right\}$ est un fermé de $\overline{A}$ qui contient A et qui est donc égal à $\overline{A}$.

Prouvons maintenant l'existence. Soit $x \in \overline{A}$ et considérons les ensembles

$$F_n = \overline{f(B(x, \frac{1}{2^n}) \cap A)}.$$

Ils sont non vides, emboîtés et puisque f est uniformément continue, on a $\operatorname{diam} F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; donc $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$ car F est complet et a un unique élément que l'on note $\overline{f}(x)$. On définit ainsi une application $\overline{f} : \overline{A} \to E'$. Remarquons que si $x \in A$ on a $f(x) \in F_n$ pour tout n, donc $f(x) = \overline{f}(x)$ ce qui prouve que $\overline{f}$ prolonge f. De plus pour tout $x \in \overline{A}$ et toute suite (x_n) d'éléments de A tels que $d(x, x_n) < 1/2^n$, on a $\overline{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ (**pourquoi ?**).

Soient maintenant $x, y \in \overline{A}$ et $\varepsilon > 0$; si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est une suite d'éléments de A qui converge vers x (resp. y), comme f est uniformément continue il existe $\eta > 0$ tel que si $d(x_n, y_n) < \eta$ alors $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/2$. Supposons $d(x, y) < \eta$, alors pour n assez grand on aura $d(x_n, y_n) < \eta$ donc $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/2$ et par conséquent $d(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) < \varepsilon$ (**pourquoi ?**) donc f est uniformément continue. □

Remarque. L'hypothèse "uniformément continue” n'est pas inutile. Considérer par exemple $f(x) = \sin(1/x)$ sur $]0, +\infty[$.

Pour terminer nous allons démontrer un résultat important, à savoir “le théorème du point fixe de Banach”. Il a de nombreuses applications : approximation de solutions d'une équation, théorème de Cauchy pour les équations différentielles, théorème d'inversion locale, ...

THÉORÈME 5.3.6. *Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante, c'est-à-dire telle qu'il existe une constante $k \in]0, 1[$ vérifiant*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant k \cdot d(x, y)$$

pour tout $x, y \in E$. Alors il existe un unique point fixe pour f, c'est-à-dire un unique point $\xi \in E$ tel que $f(\xi) = \xi$.

DÉMONSTRATION. *Unicité.* Soient ξ_1 et ξ_2 tels que $f(\xi_1) = \xi_1$ $f(\xi_2) = \xi_2$. On a alors $d(\xi_1, \xi_2) = d(f(\xi_1), f(\xi_2) \leqslant k \cdot d(\xi_1, \xi_2)$. Comme $k \in]0, 1[$, ceci n'est possible que si $d(\xi_1, \xi_2) = 0$ donc $\xi_1 = \xi_2$.

Existence. Soit a un élément quelconque de E. On montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{si} \ \ n \geqslant 0$$

converge vers un point ξ vérifiant $f(\xi) = \xi$.

Comme E est complet, pour montrer que cette suite converge il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy. On montre d'abord par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^n \cdot d(x_0, x_1)$. C'est vrai pour $n = 0$; d'autre part si c'est vrai pour n, alors $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leqslant k \cdot d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^{n+1} \cdot d(x_0, x_1)$ c'est-à-dire que c'est vrai pour $n+1$.

Maintenant si $m < n$, on a

$$\begin{array}{rcl} d(x_m, x_n) & \leqslant & d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n_1}, x_n) \\ & \leqslant & (k^m + \cdots k^{n-1}) \cdot d(x_0, x_1) \\ & \leqslant & \frac{k^m}{1-k} \cdot d(x_0, x_1) \end{array}.$$

Comme $k^m/(1-k)$ tend vers 0 quand m tend vers l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $M > 0$ tel que si $m > M$ alors $k^m \cdot d(x_0, x_1)/(1-k) < \varepsilon$, donc si $p, q > M$ on a $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. La suite (x_n) est de Cauchy et converge donc vers un point $\xi \in E$. Comme f est continue la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\xi)$, mais $(f(x_n))_{n\geqslant 0} = (x_n)_{n>0}$, par unicité de la limite on a donc $f(\xi) = \xi$. $\square$

Attention ! Dans ce théorème on ne peut pas remplacer la condition $d(f(x), f(y)) \leqslant k \cdot d(x, y)$ par $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$: si $f(x) = \sqrt{1+x^2}$,

1) **montrer que** l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.

2) **montrer que** f vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Remarque.La démonstration du théorème donne un moyen de déterminer des valeurs approchées du point fixe ; on a $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \xi$ et plus précisément $d(x_n,\xi) < k^n \cdot d(x_0,\xi)$ ce qui donne une idée de la vitesse de la convergence. De plus

$$d(x_n,\xi) \leqslant \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0,x_1),$$

donc dès que l'on connaît x_0 et x_1, on a pour tout n une majoration de $d(x_n,\xi)$.

Exemple d'utilisation.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la distance produit, c'est-à-dire celle qui provient de la norme

$$\left\|(x_1,\cdots,x_n)\right\| = \max_{i=1,\cdots,n}\left(|x_i|\right),$$

et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est de la forme $M = I + B$. L'équation $f(x) = b$ se traduit matriciellement par $x = b - B\cdot x$. Si l'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $g(x) = b - B\cdot x$ est contractante, le théorème du point fixe garantit l'existence d'une unique solution de $g(x) = x$ donc d'une unique solution de $f(x) = b$, ce qui signifie que f est inversible.

Montrer que g est contractante si et seulement si la matrice $B = (b_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ vérifie

$$\max_{i=1,\cdots,n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|b_{i\,j}\right|\right) < 1.$$

CHAPITRE 6

Espaces fonctionnels

6.1. Convergence simple et convergence uniforme

On considère E un ensemble quelconque et (F, d) un espace métrique

DÉFINITION 6.1.1. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de E dans F *converge simplement* sur E si pour tout $x \in E$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

En désignant cette limite par $f(x)$, on détermine une application $f : E \longrightarrow F$ qui est appelée *limite simple* de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DÉFINITION 6.1.2. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de E dans F *converge uniformément* sur E, si il existe une application $f : E \longrightarrow F$ telle que la suite de terme général $u_n = \sup_{x\in E} d(f(x), f_n(x))$ converge vers 0.

Relation entre convergence simple et uniforme.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans F.

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur E signifie

$$(\forall x \in E)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n)\ (n \geqslant N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)\,.$$

2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E signifie

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n)\ (\forall x \in E)\ (n \geqslant N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)\,.$$

On remarque facilement que la convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque est fausse.

Exemple Soit $f_n : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = t^n$.

1) **Vérifier que** la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par $f(t) = 0$ si $t \in [0,1[$ et $f(t) = 1$ si $t = 1$.

2) **Montrer que** la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Néanmoins il y a un cas important où la réciproque est vraie :

LEMME 6.1.3. *Soit E un espace topologique compact et soient f_n, $n = 1,2,3,\ldots$, et f des applications continues de E dans un espace métrique F. Si pour tout $x \in E$ la suite des distances $d(f(x), f_n(x))$ est décroissante et tend vers 0, la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f est uniforme.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $\epsilon > 0$, $E_n = \{x \in E | d(f(x), f_n(x)) \geqslant \varepsilon\}$ est une partie fermée de E (**pourquoi ?**), la suite E_n est emboîtée (**pourquoi ?**) et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \emptyset$ (**pourquoi ?**).

Comme E est compact, il existe n_0 tel que $E_{n_0} = \emptyset$ par conséquent pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in E$ $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f sur E. □

COROLLAIRE 6.1.4. (Théorème de Dini) *Soit E un espace topologique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et qu'elle converge simplement vers $f \in \mathscr{C}(E, \mathbb{R})$, alors elle converge uniformément vers f sur E.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent. La décroissance de la suite et sa convergence simple vers f assurent que, pour tout x de E, la suite de terme général $|f(x) - f(x_n)|$ tend vers zéro en décroissant. □

Attention. Dans l'énoncé du corollaire c'est la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est monotone, pas les fonctions f_n (E n'est pas ordonné en général).

6.2. Théorème d'Ascoli

Soit E un espace métrique compact, on considère $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de E dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On se propose de caractériser les parties compactes de $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$.

Soit A une partie de $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$, si A est compacte alors A est fermée et bornée mais ces conditions ne sont pas suffisantes comme le prouve l'exemple suivant :

Considérons $E = [0,1]$ et $A = \{f_n : x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\overline{A}$ est borné car $A \subset \widetilde{B}(0,1)$, $\overline{A}$ est fermé mais $\overline{A}$ n'est pas compact car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de sous suite convergente. En effet la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\chi_{\{1\}}$ définie par $\chi_{\{1\}}(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $\chi_{\{1\}}(1) = 1$, donc toute sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\chi_{\{1\}}$. Par conséquent $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément vers une fonction continue.

DÉFINITION 6.2.1. On dit que $A \subset \mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ est *équicontinue* en $x_0 \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute $f \in A$, si $d(x,x_0) < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Exemple. L'ensemble $\Lambda_k = \{f \in \mathscr{C}(E,\mathbb{R}) \mid |f(x) - f(y)| \leqslant kd(x,y)\}$ est équicontinu.

THÉORÈME 6.2.2. (Théorème d'Ascoli) *Soit E un espace métrique compact, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) A est une partie compacte de $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$

ii) A est une partie fermée, bornée, équicontinue de $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION. $i) \Rightarrow ii)$. A étant compacte, elle est évidemment fermée et bornée, il reste à prouver qu'elle est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$, comme A est compacte, elle a la propriété des réverbères , il existe donc $f_1,\ldots,f_n \in A$ telles que $A \subset \cup_{i=1}^n B(f_i,\epsilon/3)$. Soit x_0 un point de E, comme chaque f_i est continue en x_0, il existe $\eta_i > 0$ tel que si $d(x,x_0) < \eta_i$ alors $|f_i(x) -$

$f_i(x_0)| < \varepsilon/3$. Posons $\eta = \min_{i=1,\ldots,n} \eta_i$. Si $f \in A$, il existe alors f_i telle que $\| f - f_i\|_\infty < \varepsilon/3$ et par conséquent si $d(x, x_0) < \eta$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x_0)| + |f_i(x_0) - f(x_0)|$$

et donc

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant 2\|f - f_i\|_\infty + \varepsilon/3 < \varepsilon.$$

$ii) \Rightarrow i)$. Comme $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ est complet, A est une partie complète **(pourquoi ?)**, il suffit donc de prouver que A possède la propriété des réverbères. Fixons $\varepsilon > 0$.

L'espace E étant compact on peut le recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes $B(x_1, \eta_{x_1}), \ldots$ où les η_{x_i} sont associés aux x_i par l'équicontinuité de A, i.e. pour toute $f \in A$, si $d(x, x_i) < \eta_{x_i}$ alors $|f(x) - f(x_i)| < \epsilon/4$.

Comme A est bornée, pour chaque $x \in E$, $\{f(x) | f \in A\}$ a une adhérence compacte dans $\mathbb{R}$ et donc l'ensemble des valeurs des éléments de A aux points $x_1, \ldots, x_n$ a une adhérence compacte dans $\mathbb{R}$, on peut donc le recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de centres $y_1, \ldots, y_p$ et de rayon $\varepsilon/4$.

Soit Γ l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, p\}$, c'est un ensemble fini. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit A_γ l'ensemble des $f \in A$ telles que

$$|f(x_1) - y_{\gamma(1)}| < \epsilon/4, \ldots, |f(x_n) - y_{\gamma(n)}| < \varepsilon/4$$

Par construction les A_γ recouvrent A. il reste seulement à démontrer que pour γ fixé, A_γ est contenu dans une boule de rayon ε. Soient f et g appartenant à A_γ et x dans E, il existe x_i tel que $d(x, x_i) < \eta_{x_i}$ et par conséquent

$$\left| f(x) - f(x_i) \right| < \epsilon/4 \quad \text{et} \quad \left| g(x) - g(x_i) \right| < \varepsilon/4.$$

De plus

$$\left| f(x_i) - y_{\gamma(i)} \right| < \epsilon/4 \quad \text{et} \quad \left| g(x_i) - y_{\gamma(i)} \right| < \varepsilon/4.$$

d'où

$$\left| f(x) - g(x) \right| \leqslant \left| f(x) - f(x_i) \right| + \left| f(x_i) - y_{\gamma(i)} \right| + \left| y_{\gamma(i)} - g(x_i) \right| + \left| g(x_i) - g(x) \right| < \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a $\| f - g \|_\infty < \varepsilon$. $\square$

Application. Montrer qu'une partie fermée, bornée de Λ_k est une partie compacte de $\mathscr{C}(E, \mathbb{R})$.

Remarques.

1) La démonstration précédente est encore valable si E est un espace topologique compact.

2) Dans le théorème d'Ascoli on peut remplacer $\mathbb{R}$ par un espace métrique complet F, et dans ce cas il faut remplacer l'hypothèse "A bornée" par "pour tout $x \in E$ l'ensemble des $f(x)$ où f parcourt A a une adhérence compacte dans F".

6.3. Théorème de Stone-Weierstrass

Le but de ce paragraphe est de prouver que si une famille de fonctions continues sur un espace topologique compact X à valeurs réelles est assez riche et est stable par certaines opérations, elle est dense dans $(\mathscr{C}(E, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, c'est-à-dire que toute fonction continue sur X à valeurs réelles peut-être approchée uniformément sur X par des fonctions de la famille.

LEMME 6.3.1. *Soit X un espace topologique compact et $\mathscr{H}$ une partie de $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) Si $u \in \mathscr{H}$ et $v \in \mathscr{H}$, alors $\sup(u,\ v) \in \mathscr{H}$ et $\inf(u,\ v) \in \mathscr{H}$.

(ii) Si x et y sont des points de X et si α et β sont des nombres réels (avec $\alpha = \beta$ si $x = y$), il existe $u \in \mathscr{H}$ telle que $u(x) = \alpha$ et $u(y) = \beta$.

Alors toute fonction de $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de $\mathscr{H}$, i.e $\overline{\mathscr{H}} = \mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de construire $g \in \mathscr{H}$ telle que $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$ i.e $f - \varepsilon < g < f + \varepsilon$.

a) Soit $x_0 \in X$. Montrons qu'il existe une fonction $u \in \mathscr{H}$ telle que $u(x_0) = f(x_0)$ et $u > f - \varepsilon$.

Pour tout $y \in X$, il existe $u_y \in \mathscr{H}$ telle que $u_y(x_0) = f(x_0)$ et $u_y(y) = f(y)$. L'ensemble V_y des $x \in X$ tels que $u_y(x) > f(x) - \varepsilon$ est un ouvert **(pourquoi ?)** et $y \in V_y$, donc $(V_y)_{y\in X}$ est un recouvrement ouvert de X. Puisque X est compact, on peut en extraire une recouvrement fini $(V_{y_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. Soit $u = \sup(u_{y_1},\ \cdots,\ u_{y_n}) \in \mathscr{H}$. On a $u_{y_i}(x_0) = f(x_0)$ pour tout i, donc $u(x_0) = f(x_0)$. Si $x \in X$, il existe un indice i tel que $x \in V_{y_i}$ et alors $u(x) \geqslant u_{y_i}(x) > f(x) - \varepsilon$. Ainsi u vérifie les conditions annoncées.

b) La fonction u construite en a) dépend de x_0. Pour tout $x \in X$, définissons de même $v_x \in \mathscr{H}$ telle que $v_x(x) = f(x)$ et $v_x > f - \varepsilon$. L'ensemble W_x des $z \in X$ tels que $v_x(z) < f(z) + \varepsilon$ est ouvert **(pourquoi ?)** et on a $x \in W_x$; donc X est recouvert par les W_x. De la compacité de X on déduit l'existence d'un recouvrement fini $(W_{x_j})_{1\leqslant j\leqslant p}$ de X. Soit $g = \inf(v_{x_1},\ \cdots,\ ,\ v_{x_p}) \in \mathscr{H}$. On a $v_{x_j} > f - \varepsilon$ pour tout $j = 1,\ \cdots,\ p$, donc $g > f - \varepsilon$. Soit $x \in X$, il existe un indice j tel que $x \in W_{x_j}$ et donc $g(x) \leqslant v_{x_j}(x) < f(x) + \varepsilon$. $\square$

LEMME 6.3.2. *La fonction $\sqrt{t}$ sur $[0,\ 1]$ est la limite uniforme d'une suite de polynômes en t à coefficients réels.*

Démonstration. Définissons les polynômes $p_0, \ p_1, \ \cdots$ sur $[0, \ 1]$ par récurrence de la manière suivante : pour $t \in [0, \ 1]$

$$\begin{cases} p_0(t) & = & 0 \\ p_{n+1}(t) & = & p_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - p_n(t)^2\right) \end{cases}$$

Les fonctions p_n , $n \in \mathbb{N}$, sont des polynômes (**pourquoi ?**). Montrons par récurrence sur n que pour tout $t \in [0, \ 1]$ on a

$$0 \leqslant p_0(t) \leqslant p_1(t) \leqslant \cdots \leqslant p_n(t) \leqslant \sqrt{t}.$$

Il en est bien ainsi pour $n = 0$, supposons donc que c'est encore le cas pour n. Comme $t \geqslant p_n^2(t)$ on a $p_{n+1}(t) \geqslant p_n(t)$ et de plus

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t) - \sqrt{t} &= p_n(t) - \sqrt{t} + \frac{1}{2}\left(t - p_n(t)^2\right) \\ &= \left(p_n(t) - \sqrt{t}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(p_n(t) + \sqrt{t}\right)\right) \end{aligned}$$

or $p_n(t) + \sqrt{t} \leqslant 2\sqrt{t}$, donc $1 - \frac{1}{2}\left(p_n(t) + \sqrt{t}\right) \geqslant 1 - \sqrt{t} \geqslant 0$ et $p_n(t) - \sqrt{t} \leqslant 0$ et par suite $p_{n+1}(t) - \sqrt{t} \leqslant 0$.

Pour tout $t \in [0, \ 1]$ la suite $(p_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{t}$, elle a donc une limite finie $f(t) \geqslant 0$ qui vérifie $f(t) = f(t) + \frac{1}{2}\left(t - f(t)^2\right)$ (**pourquoi ?**). Par conséquent $f(t) = \sqrt{t}$. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, il résulte alors du théorème de Dini qu'elle converge uniformément vers f sur $[0, \ 1]$. □

Théorème 6.3.3. (Théorème de Stone-Weierstraβ) *Soit X un espace métrique compact, $\mathscr{H}$ une partie $\mathscr{C}(X, \ \mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Les fonctions constantes appartiennent à $\mathscr{H}$.

(ii) Si $u, \ v \in \mathscr{H}$, alors $u + v \in \mathscr{H}$ et $uv \in \mathscr{H}$.

(iii) Si $x, y \in X$ sont deux points distincts de X, il existe $u \in \mathscr{H}$ telle que $u(x) \neq u(y)$.

Alors toute fonction de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de $\mathscr{H}$, i.e $\overline{\mathscr{H}} = \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION. Soit $\overline{\mathscr{H}}$ l'adhérence de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On va montrer que $\overline{\mathscr{H}}$ satisfait les hypothèses du lemme 6.3.1, ce qui entraînera que $\overline{\overline{\mathscr{H}}} = \overline{\mathscr{H}} = \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$.

a) Si $u, v \in \overline{\mathscr{H}}$, on a $u+v \in \overline{\mathscr{H}}$ car il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{H}$ qui convergent respectivement vers u et v dans $(\mathscr{C}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$; il en résulte que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u + v$ qui appartient donc à $\overline{\mathscr{H}}$. De même $uv \in \overline{\mathscr{H}}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u \in \overline{\mathscr{H}}$. Donc tout polynôme en u, c'est-à-dire toute fonction de la forme $\lambda_0 + \lambda_1 u + \cdots + \lambda_n u^n$, où $\lambda_0, \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}$, appartient à $\overline{\mathscr{H}}$.

b) Prouvons que $|u| \in \overline{\mathscr{H}}$. La fonction u est continue sur X donc bornée. En la multipliant par une constante convenable, on peut se ramener au cas où $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Alors $0 \leqslant u^2 \leqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$; d'après le lemme 6.3.2, il existe un polynôme $p(t)$ à coefficients réels tel que $|p(t) - \sqrt{t}| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors $\left| p\left(u(x)^2\right) - \sqrt{u(x)^2}\right| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$, i.e $\left\|p(u^2) - |u|\right\|_\infty < \varepsilon$. Or $p(u^2) \in \overline{\mathscr{H}}$ d'après a), par conséquent $|u| \in \overline{\mathscr{H}}$.

c) Si $u, v \in \overline{\mathscr{H}}$, on a compte tenu de a) et b)

$$\begin{aligned} \sup(u, v) &= \tfrac{1}{2}(u+v+|u-v|) \in \overline{\mathscr{H}} \\ \inf(u, v) &= \tfrac{1}{2}(u+v-|u-v|) \in \overline{\mathscr{H}} \end{aligned}$$

d) Soient x et y des points distincts de X et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il existe $v \in \mathscr{H}$ tel $v(x) \neq v(y)$. Posons

$$v' = \frac{1}{v(x) - v(y)}(v - v(y)).$$

On a $v' \in \mathscr{H}$ et $v'(x) = 1$, $v'(y) = 0$. Soit maintenant $u = \beta + (\alpha - \beta)v'$, on a $u(x) = \alpha$ et $u(y) = \beta$. $\square$

COROLLAIRE 6.3.4. *Soit X un espace topologique compact et $\mathscr{H}$ un ensemble de fonctions continues sur X à valeurs complexes qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) Les fonctions constantes complexes appartiennent à $\mathscr{H}$.

(ii) Si $u,\ v \in \mathscr{H}$, alors $u+v \in \mathscr{H}$, $uv \in \mathscr{H}$ et $\overline{u} \in \mathscr{H}$.

(iii) Si $x,\ y \in X$ sont deux points distincts de X, il existe $u \in \mathscr{H}$ telle que $u(x) \neq u(y)$.

Alors toute fonction de $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de $\mathscr{H}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathscr{H}'$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{H}$ à valeurs réelles. Alors $\mathscr{H}'$ vérifie les conditions (i) et (ii) du théorème 6.3.3. Si x et y sont deux points distincts de X, il existe $u \in \mathscr{H}$ telle que $u(x) \neq u(y)$; alors soit $\mathrm{Re}(u(x)) \neq \mathrm{Re}(u(y))$ soit $\mathrm{Im}(u(x)) \neq \mathrm{Im}(u(y))$. Or $\mathrm{Re}(u) = \frac{1}{2}(u+\overline{u}) \in \mathscr{H}'$ et $\mathrm{Im}(u) = \frac{1}{2i}(u-\overline{u}) \in \mathscr{H}'$, donc $\mathscr{H}'$ vérifie aussi la condition (iii) du théorème 6.3.3.

Soit $g \in \mathscr{C}(X,\mathbb{C})$. On a $g = g_1 + ig_2$ avec $g_1,\ g_2 \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$. D'après le théorème 6.3.3, g_1 et g_2 sont limites uniformes de fonctions de $\mathscr{H}'$ donc g est limite uniforme de fonctions de $\mathscr{H}$. $\square$

COROLLAIRE 6.3.5. *Soit X une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathscr{C}(X,\ \mathbb{C})$. Alors f est limite uniforme sur X d'une suite de polynômes en n variables à coefficients complexes.*

DÉMONSTRATION. Soit $\wp$ l'ensemble des polynômes en n variables à coefficients complexes. Ce sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ dont les restrictions sur X forment une partie $\mathscr{H}$ de $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{C})$ satisfaisant aux conditions du corollaire 6.3.4. $\square$

COROLLAIRE 6.3.6. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, de période 1. Alors f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques (c'est-à-dire de fonctions de la formes $t \mapsto \sum_{r=-n}^{n} a_r \mathrm{e}^{2i\pi rt}$ où les a_r sont des constantes complexes).*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\right\}$. L'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$ définie par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{2i\pi x}$ est continue. Puisque f est de période 1, il existe une fonction g définie sur $\mathbb{U}$ telle que $f(x) = g(\varphi(x))$ et de plus g est continue **(pourquoi ?)**.

Maintenant $\mathbb{U}$ est une partie compacte de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Si on se donne un $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $\sum_{p,q} a_{p,q} x^p y^q$ en x et y à coefficients complexes tel que

$$\left| g(x + iy) - \sum_{p,q} a_{p,q} x^p y^q \right| < \varepsilon$$

pour $x + iy \in \mathbb{U}$. Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\left| g\left(\mathrm{e}^{2i\pi t}\right) - \sum_{p,q} a_{p,q} (\cos 2\pi t)^p (\sin 2\pi t)^q \right| < \varepsilon.$$

Comme $\cos 2\pi t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2i\pi t} + \mathrm{e}^{-2i\pi t}\right)$ et $\sin 2\pi t = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{2i\pi t} - \mathrm{e}^{-2i\pi t}\right)$, la fonction

$$\sum_{p,q} a_{p,q} (\cos 2\pi t)^p (\sin 2\pi t)^q$$

est un polynôme trigonométrique. □

CHAPITRE 7

Espaces vectoriels normés

7.1. Généralités

Rappel. Si E est un espace vectoriel sur K, on appelle norme sur E une application $\|\cdot\|$: $E \longrightarrow K$ telle que :

(i) $\|x\| \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

(ii) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(iii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in K$.

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\cdot\|)$ et on appelle distance associée à la norme la fonction $d(x, y) = \|x - y\|$.

C'est toujours à cette distance que nous ferons référence dans la suite.

Lemme 7.1.1. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé sur un corps* $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ *; alors les applications suivantes sont continues :*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(x_0, y_0) \in E \times E$. On a

$$\begin{array}{rcl} \|(x+y)-(x_0+y_0)\| & \leqslant & \|x-x_0\| + \|y-y_0\| \\ & \leqslant & 2\max(\|x-x_0\|, \|y-y_0\|) \end{array}.$$

Maintenant, si $(\lambda_0, x_0) \in K \times E$ on a

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leqslant |\lambda| \cdot \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \cdot \|x_0\| \,;$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta > 0$ tel que si $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ alors $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|x_0\| < \varepsilon/2$. Comme $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ implique aussi $|\lambda| < \eta + |\lambda_0|$, il résulte que si en plus $\|x - x_0\| < \varepsilon/2(\eta + |\lambda_0|)$, on aura $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$. □

PROPOSITION 7.1.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

1) si $F \neq E$ on a $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.

2) $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

DÉMONSTRATION. 1) Supposons que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$; alors il existe $x \in F$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset F$. Puisque F est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $B(0, \varepsilon) \subset F$. On faisant des homothéties il en résulte finalement que $F = E$.

2) L'application $s : E \times E \longrightarrow E$ définie par $s(x, y) = x + y$ étant continue ainsi que l'application $m : K \times E \longrightarrow E$ définie par $m(\lambda, x) = \lambda x$, on a

$$s(\overline{F} \times \overline{F}) = s(\overline{F \times F}) \subset \overline{s(F \times F)} \subset \overline{F}$$

et

$$m(K \times \overline{F}) = m(\overline{K \times F}) \subset \overline{m(K \times F)} \subset \overline{F}.$$

$\square$

PROPOSITION 7.1.3. *soit E un espace vectoriel sur K, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E, d_1 et d_2 les distances associées. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in E$

$$\alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1 .$$

ii) Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x, y \in E$

$$\alpha d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant \beta d_1(x, y).$$

iii) Les distances d_1 et d_2 sont toplogiquement équivalentes.

DÉMONSTRATION. i)$\Longrightarrow$ ii). Il suffit d'appliquer i) à $x - y$.

ii)$\Longrightarrow$ iii). Pour tout $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, on a $B_{d_2}(x, \varepsilon) \supset B_{d_1}(x, \varepsilon/\beta)$ et $B_{d_1}(x, \varepsilon) \supset B_{d_1}(x, \alpha\varepsilon)$.

iii)$\Longrightarrow$ i). Si d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes, il existe $r > 0$ et $R > 0$ tels que

$$\widetilde{B}_{d_2}(0, r) \subset \widetilde{B}_{d_1}(0, 1) \subset \widetilde{B}_{d_2}(0, R),$$

soit, grâce aux homothéties, si $a > 0$:

$$\widetilde{B}_{d_2}(0, ra) \subset \widetilde{B}_{d_1}(0, a) \subset \widetilde{B}_{d_2}(0, Ra).$$

Avec la seconde inclusion, on obtient $\|x\|_2 \leqslant R \|x\|_1$ et avec la première $r \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$. $\square$

DÉFINITION 7.1.4. Si une des propriétés précédentes est satisfaite, on dit que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

En général, sur un espace vectoriel, deux normes n'ont aucune raison d'être équivalentes :

Exemple. Dans $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$,

$$\sigma(f) = \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|, \quad \mu(f) = \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{dx}$$

sont deux normes qui ne sont pas équivalentes car si on considère les fonctions f_n affines par morceaux telles que $f_n(0) = n$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in [1/n, 1]$, on a $\mu(f_n) = 1/2$, $\sigma(f_n) = n$, donc $f_n \in B_\mu(0,1/2)$ et il n'existe aucun nombre $R > 0$ tel que $B_\mu(0,1/2) \subset B_\sigma(0,R)$.

COROLLAIRE. *Soit E un espace vectoriel, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E et $j : (E,\|\cdot\|_1) \longrightarrow (E,\|\cdot\|_2)$ l'application identique. Les énoncés suivants sont alors équivalents :*
i) les normes sont équivalentes.
ii) j est un homéomorphisme.
iii) j et j^{-1} sont lipschitziennes.

7.2. Espaces vectoriels de dimension finie

THÉORÈME 7.2.1. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. On peut évidemment supposer que $E \neq \{0\}$. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et si $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, posons $N_0(v) = \max_{i=1,\cdots,n}|x_i|$.
Vérifier que $v \mapsto N_0(v)$ est une norme sur E. Soit maintenant $\|\cdot\|$ une norme sur E ; on va montrer que $\|\cdot\|$ est équivalente à N_0. Si $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a

$$\begin{aligned} \|v\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|\right) \times \max_{i=1,\cdots,n}|x_i| \end{aligned}$$

ou encore $\|v\| \leqslant \beta N_0(v)$ avec $\beta = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ ce qui donne une des deux inégalités.

Considérons alors , d'une part, l'application identique $(E, N_0) \longrightarrow (E, \|\cdot\|)$. Il résulte immédiatement de l'inégalité obtenue que cette application est continue.

D'autre part l'application $(\mathbb{R}^n, d_\infty) \ni (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in (E, N_0)$ est une isométrie.

Puisque les parties compactes de $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ sont les parties fermées et bornées, celles de (E, N_0) sont aussi les parties fermées et bornées de E (**pourquoi ?**). En particulier $S = \{v \in E | N_0(v) =$ est une partie compacte de (E, N_0). Donc S est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$. Comme $v \mapsto \|v\|$ est continue sur S, elle atteint ses bornes. Soit $\alpha = \min_{v \in S} \|v\|$. on vient de montrer que si $N_0(v) = 1$ alors $\|v\| \geqslant \alpha$; avec des homothéties, on en déduit que $\alpha N_0(v) \leqslant \|v\|$. En regroupant les deux inégalités, on obtient ainsi

$$\alpha N_0(v) \leqslant \|v\| \leqslant \beta N_0(v).$$

□

Corollaire. *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie et si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E alors l'application*

$$(\mathbb{R}^n, d_\infty) \ni (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in (E, \|\cdot\|)$$

est lipschitzienne ainsi que son inverse.

(On utilise le fait que $(\mathbb{R}^n, d_\infty) \ni (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in (E, N_0)$ est une isométrie et que l'application identique $(E, N_0) \longrightarrow (E, \|\cdot\|)$ est lipschitzienne ainsi que son inverse).

Application. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors :
- E est un espace métrique complet.
- les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées de E.

Remarque. Les espaces vectoriels normés de dimension finie sont les seuls tels que la boule fermée $\widetilde{B}(0,1)$ soit compacte (ou $S(0,1) = \widetilde{B}(0,1) \setminus B(0,1)$).

LEMME 7.2.2. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et* F *un sous-espace vectoriel fermé de* E *et différent de* E*. Alors pour tout* $0 < \varepsilon < 1$*, il existe* $x \in E$ *tel que* $\|x\| = 1$ *et* $d(x, F) \geqslant 1 - \varepsilon$*.*

DÉMONSTRATION. Puisque $F \neq E$, il existe $v_0 \in E \backslash F$. Considérons $w_0 \in F$ tel que $d(v_0, w_0) \leqslant (1+\varepsilon) d(v_0, F)$; alors $x = (v_0 - w_0) / \|v_0 - w_0\|$ est un élément de E de norme 1 et on a

$$\begin{array}{rcl} d(x,F) & = & \inf_{w \in F} \|x - w\| \\ & = & \frac{1}{\|v_0 - w_0\|} \times \inf_{w \in F} \|v_0 - w\| \\ & \geqslant & \frac{d(v_0,F)}{(1+\varepsilon) d(v_0, f)} \qquad = \frac{1}{1+\varepsilon} \end{array}$$

d'où le résultat puisque $1/1 + \varepsilon \geqslant 1 - \varepsilon$. □

PROPOSITION 7.2.3. *Si* E *est un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule fermée unité de* E *n'est pas compacte.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut construire une famille $\{x_1, \cdots, x_n\}$ d'éléments de E de norme 1 telle que si $i \neq j$, alors $\left\|x_i - x_j\right\| \geqslant 1/2$ (ce qui montre que $\widetilde{B}(0, 1)$ ne possède pas la propriété des réverbères).

L'existence d'une telle famille pour $n = 1$ est évidente. Supposons donc en avoir construit une pour $n - 1$, $n \geqslant 2$. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. Comme F est de dimension finie, on a $F \neq E$ et F est une partie complète donc fermée de E. Avec le lemme ci-dessus, on a alors l'existence d'un élément x_n de E tel que $\|x_n\| = 1$ et $\min_{i=1,\cdots,n} \|x_n - x_i\| \geqslant 1/2$. □

7.3. Espaces de Banach

DÉFINITION 7.3.1. On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un *espace de Banach* si E, muni de la distance associée à la norme, est un espace métrique complet.

Exemples. Les espaces vectoriels normés de dimension finie sont des espaces de Banach.

PROPOSITION 7.3.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.*

1) Si A est un ensemble, alors $\mathscr{B}(A, E)$, l'espace vectoriels des applications bornées de A dans E, muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

2) Si A est un espace métrique (ou plus généralement un espace topologique), alors $\mathscr{C}_b(A, E)$, l'espace vectoriel des applications continues bornées, muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach (en particulier si A est compact alors $\mathscr{C}(A, E)$ est un espace de Banach).

DÉMONSTRATION. 1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{B}(A, E)$ pour la norme de la convergence uniforme. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N > 0$ tel que, si $p, q > N$ alors

$$\sup_{x\in A} \left\| f_p(x) - f_q(x) \right\| < \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $x \in A$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Puisque E est complet, cette suite admet une limite dans E, notée $f(x)$: autrement dit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers une fonction $f : x \mapsto f(x)$. En utilisant la continuité de la norme, on a donc : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N > 0$ tel que, si $p > N$ alors

$$\sup_{x\in A} \left\| f_p(x) - f(x) \right\| < \varepsilon$$

ce qui montre que $f : A \to E$ est bornée **(pourquoi ?)** et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

2) Comme $\mathscr{C}_b(A, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}(A, E)$, pour qu'il soit complet pour la norme de la convergence uniforme, il faut et il suffit qu'il soit fermé dans $\mathscr{B}(A, E)$, autrement dit qu'une limite uniforme de fonctions continues bornées soit une fonction continue (bornée). Soit $x_0 \in A$ et $\varepsilon > 0$; puisque $\| f_n - f \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe un entier $N > 0$ tel que

$\| f_n - f \| < \varepsilon/3$; de plus puisque f_N est continue en x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f_N(V) \subset B(f_N(x_0), \varepsilon/3)$. Grâce à l'inégalité triangulaire et à la relation

$$f(x) - f(x_0) = [f(x) - f_N(x)] + [f_N(x) - f_N(x_0)] + [f_N(x_0) - f(x_0)]$$

on obtient $f(V) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ ce qui montre la continuité de f en x_0. □

7.4. Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la *série* $\sum u_n$ converge si la suite des *sommes partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge dans E. On note par $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on l'appelle la *somme de la série.*

Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

DÉFINITION 7.4.1. On dit qu'une série $\sum u_n$ dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est *absolument convergente* si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente.

PROPOSITION 7.4.2. *Dans un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$, toute série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente.*

DÉMONSTRATION. Puisque $\sum \|u_n\|$ est convergente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N > 0$ tel que, si $N < p < q$, alors $\sum_{n=p+1}^{q} \|u_n\| < \varepsilon$. On a alors

$$\begin{array}{ccccc} \left\|S_q - S_p\right\| & = & \left\|\sum_{n=}^{q} u_n - \sum_{n=0}^{p} u_n\right\| & = & \left\|\sum_{n=p+1}^{q} u_n\right\| \\ & \leqslant & \sum_{n=p+1}^{q} \|u_n\| & < \varepsilon & \end{array}.$$

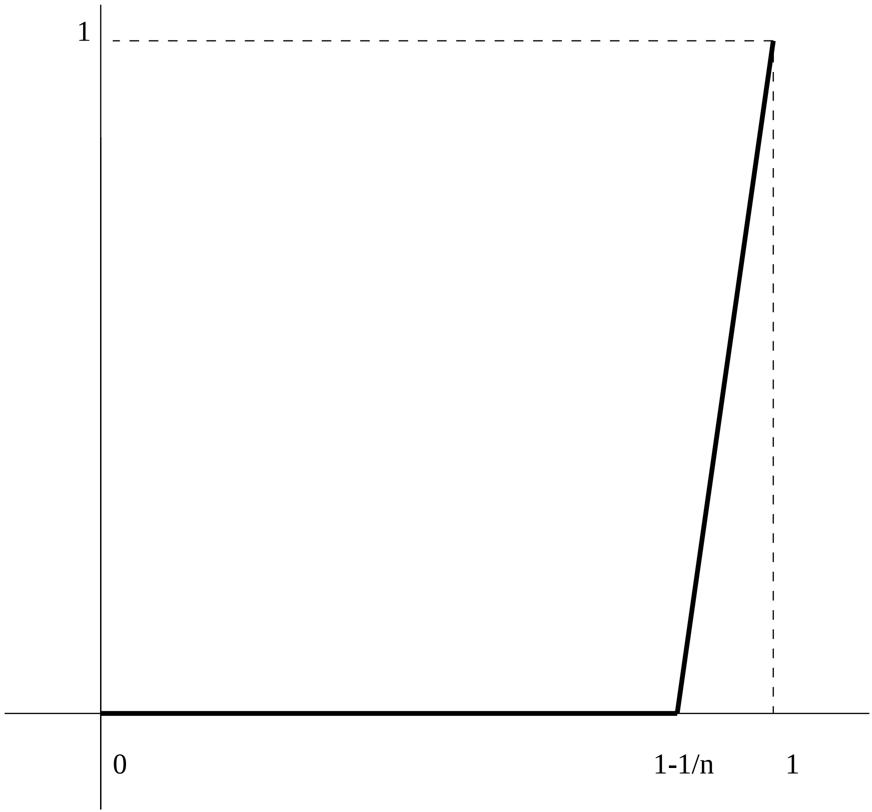
Ceci montre que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est une suite de Cauchy dans E. Comme E est complet, cette suite est convergente ; autrement dit $\sum u_n$ converge. □

7.5. Applications linéaires continues

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Remarque préliminaire. L n'est pas nécessairement continue !

Exemple. Soit $E = \mathscr{C}[0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\mu(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{dt}$ et soit $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(1)$. Si on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions affines par morceaux :



on a $\mu(f_n) = 1/2n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $L(f_n)$ ne tend pas vers $L(0)$ quand n tend vers l'infini. Ceci montre que L n'est pas continue.

On se propose de comprendre ce qu'est une application linéaire continue en profitant "scandaleusement" de la linéarité de L.

PROPOSITION 7.5.1. *Soient* $(E, \|\cdot\|_1)$ *et* $(F, \|\cdot\|_2)$ *deux espaces vectoriels normés et* $L : E \to F$ *une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) L est continue partout.

ii) L est continue en 0.

iii) L est bornée sur $\widetilde{B}(0,1)$.

iv) Il existe une constante réelle $M > 0$ *telle que*

$$\|L(x)\|_2 \leqslant M \|x\|_1$$

pour tout $x \in E$.

v) Il existe une constante réelle $M > 0$ *telle que*

$$\|L(x) - L(y)\|_2 \leqslant M \|x - y\|_1$$

pour tout $x, y \in E$.

vi) L est uniformément continue sur E.

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii). Immédiat.

ii) $\Longrightarrow$ iii). Puisque L est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x\|_1 \leqslant \eta$ alors $\|L(x)\|_2 \leqslant 1$. Si $\|x\|_1 \leqslant 1$, alors $\|\eta x\|_1 \leqslant \eta$ et par suite $\|L(\eta x)\|_2 \leqslant 1$. Or $\|L(\eta x)\|_2 = |\eta| \cdot \|L(x)\|_2$. La constante $M = 1/|\eta|$ convient.

iii) $\Longrightarrow$ iv). Si $x = 0$, l'inégalité est immédiate. Sinon, on opère encore par homothéties. Pour $x \neq 0$, on a $x = \|x\|_1 \cdot \frac{x}{\|x\|_1}$ et $L(x) = \|x\|_1 \cdot L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)$. Comme $\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_1 = 1$ on a donc $\left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 \leqslant M$ ou encore $\|L(x)\|_2 \leqslant M \|x\|_1$.

iv) $\Longrightarrow$ v). On a, avec la linéarité de L :

$$\left\|L(x) - L(y)\right\|_2 = \left\|L(x-y)\right\|_2 \leqslant \left\|x-y\right\|_1 .$$

v) $\Longrightarrow$ vi). Immédiat.

vi) $\Longrightarrow$ i) Immédiat. $\square$

Remarque. Si L est continue en un point $x \in E$, alors L est continue partout (**pourquoi ?**).

PROPOSITION 7.5.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de* dimension finie. *Alors toute application linéaire de E dans un espace vectoriel normé F est continue.*

DÉMONSTRATION. On choisit une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de E et on définit $N_0(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$. On a alors

$$\|L(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n)\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|L(e_i)\|_2\right) \cdot N_0(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n).$$

Comme toutes les normes sur E sont équivalentes, on a donc $\|L(x)\|_2 \leqslant M\|x\|_1$ pour une certaine constante M ce qui entraîne la continuité de L. $\square$

PROPOSITION 7.5.3. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A \subset E$ un sous-espace vectoriel dense dans E. Alors toute application linéaire continue $L : A \to F$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de E dans F.*

DÉMONSTRATION. On remarque tout d'abord que L étant continue, L est uniformément continue. Ensuite, puisque L prend ses valeurs dans un espace complet et que A est dense dans E, L se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{L} : E \to F$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\tilde{L}$ est linéaire. Considérons

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{L}(x+y) - \tilde{L}(x) - \tilde{L}(y); \end{array}$$

il s'agit d'une application continue qui est nulle sur $A \times A$. Comme $A \times A$ est dense dans $E \times E$, cette application est identiquement nulle, d'où l'additivité de $\widetilde{L}$. De la même manière, on montre que l'application

$$\begin{array}{rcl} K \times E & \longrightarrow & F \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \widetilde{L}(\lambda \cdot x) - \lambda \cdot \widetilde{L}(x) \end{array}$$

est identiquement nulle. $\square$

Proposition 7.5.4. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et L une forme linéaire sur E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans son corps de base $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) L est continue.

ii) $\ker(L) = \{v \in E \mid L(v) = 0\}$ *est une partie fermée de E.*

Démonstration. i) $\Longrightarrow$ ii) Immédiat.

ii) $\Longrightarrow$ i). Si $\ker(L) = E$, le résultat est immédiat. Sinon, il existe $a \in E$ tel que $L(a) = 1$ (**pourquoi ?**). Alors $L^{-1}(\{1\}) = \{a + v \mid v \in \ker(L)\}$ est une partie fermée non vide de E et il existe $r > 0$ tel que $\widetilde{B}(0, r) \cap L^{-1}(\{1\}) = \emptyset$. Il en résulte que si $x \in \widetilde{B}(0, r)$, alors $|L(x)| < 1$ (**pourquoi ?**). Grâce aux homothéties, on en déduit que L est bornée sur $\widetilde{B}(0, 1)$ (si $x \in \widetilde{B}(0, 1)$, alors $r \cdot x \in \widetilde{B}(0, r)$ et donc $|L(x)| < 1/r$). $\square$

7.6. L'espace des applications linéaires continues

Notation. Si $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ l'ensemble des applications linéaires *continues* de E_1 dans E_2.

Pour $T \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$, on pose

$$|||T||| = \sup_{\|v\|_1=1} \|T(v)\|_2 = \sup_{\|v\|_1\leqslant 1} \|T(v)\|_2 = \sup_{v\neq 0} \frac{\|T(v)\|_2}{\|v\|_1}.$$

On vérifie facilement que pour tout $v \in E_1$, on a

$$\|T(v)\|_2 \leqslant |||T||| \cdot \|v\|_1 .$$

Proposition 7.6.1. *$|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E_1, E_2)$. De plus, si E_2 est un espace de Banach, $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ est aussi un espace de Banach.*

Démonstration. Le fait que $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ soit un espace vectoriel est immédiat. $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E_1, E_2)$, **Démontrez-le !**

Reste à voir que si E_1 est complet, il en est de même de $\mathscr{L}(E_1, E_2)$. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ et soit $x \in E_1$. On a

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_2 \leqslant |||T_n - T_m||| \cdot \|x\|_1 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

donc $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E_2 ; puisque E_2 est complet, elle converge vers une limite que nous noterons $T(x)$. On définit ainsi une application $T : E_1 \to E_2$.

Montrer que T est linéaire.

Montrons que T est continue. Pour cela, considérons les $T_{n|\widetilde{B}(0,1)}$; il s'agit d'une suite de Cauchy de fonctions bornées sur $\widetilde{B}(0,1)$ à valeurs dans E_2. Cette suite converge alors uniformément sur $\widetilde{B}(0,1)$ vers $T_{|\widetilde{B}(0,1)} \in \mathscr{B}(\widetilde{B}(0,1), E_2)$. Ainsi T est bornée sur la boule unité, ce qui signifie que T est continue. $\square$

CHAPITRE 8

Espaces de Hilbert

8.1. Définitions et propriétés générales

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 8.1.1. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Une forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) sur V est une application $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ qui possède les propriétés suivantes :
i) $y \longmapsto h(x,y)$ est $\mathbb{K}$-linéaire pour tout $x \in V$.
ii) $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$.

Remarque.
- Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la condition ii) devient $h(x,y) = h(y,x)$, ce qui entraîne facilement que h est bilinéaire symétrique.
- Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les conditions i) et ii) entraînent que $x \longmapsto h(x,y)$ est *semi-linéaire* c.ad que $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$ et $h(\lambda x, y) = \overline{\lambda} h(x,y)$.

\

On dit qu'une telle forme est positive si $h(x,x) \geqslant 0$ pour tout $x \in V$ et qu'elle est définie positive si de plus $h(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Exemples fondamentaux. Sur $\mathbb{R}^n$, $h(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Sur $\mathbb{C}^n$, $h(x,y) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ est une forme hermitienne définie positive.

Autre exemple : sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$, on peut considérer $h(f,g) = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\,dt$.

Un exemple important : **Montrer que** si D désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continues à gauche, alors

$$h(f,g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,dt$$

est une forme hermitienne définie positive.

LEMME. *Soit h une forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) définie positive sur un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$ (rep. $\mathbb{C}$). On a alors*

i) $|h(x,y)| \leqslant \sqrt{h(x,x)h(y,y)}$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

ii) $\sqrt{h(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{h(x,x)} + \sqrt{h(y,y)}$.

DÉMONSTRATION. i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant h(x+\lambda y, x+\lambda y) &= h(x,x) + \lambda h(y,x) + \lambda h(x,y) + \lambda^2 h(y,y) \\ &= h(x,x) + 2\lambda \mathrm{Re}\, h(x,y) + \lambda^2 h(y,y) \end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré a donc un discriminant négatif ou nul :

$$|\mathrm{Re}\, h(x,y)|^2 \leqslant h(x,x)h(y,y),$$

d'où le résultat dans $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{C}$, on multiplie y par un nombre complexe μ de module 1 de telle sorte que

$$|h(x,y)|^2 = |\mathrm{Re}\, h(x,\mu y)|^2 \leqslant h(x,x)h(\mu y,\mu y),$$

d'où le résultat puisque $h(\mu y,\mu y) = |\mu|^2 h(y,y) = h(y,y)$.

ii) Il suffit de développer $h(x+y, x+y)$ et d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. **Faites-le**.

$\square$

PROPOSITION 8.1.2. *Si h une forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) définie positive sur un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), alors $x \mapsto \sqrt{h(x,x)}$ est une norme sur V.*

Ecrivez la démonstration.

DÉFINITION 8.1.3. Un espace vectoriel normé dont la norme provient d'une forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) définie positive s'appelle un *espace préhilbertien*. Si de plus cet espace vectoriel normé est complet, on dit que l'espace est un *espace de Hilbert*.

Notation. Dorénavant, nous noterons $h(x,y)$ par $\langle x, y\rangle$ et $\sqrt{h(x,x)}$ par $\|x\|$.

DÉFINITION 8.1.4. Dans un espace préhilbertien V, on dit que $x, y \in V$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$.

PROPOSITION 8.1.5. *Soit V un espace préhilbertien et $x, y \in V$. Alors*
i) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (Identité du parallélogramme).
ii) Si x et y sont orthogonaux, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Théorème de Pythagore).

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{array}{rcl} \langle x+y, x+y\rangle & = & \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ \langle x-y, x-y\rangle & & \langle x, x\rangle - 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle\,. \end{array}$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient i). La première égalité ci-dessus donne ii) lorsque $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Exemples d'espaces de Hilbert.
$\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Hilbert.

Un exemple important est fourni par $\ell^2(\mathbb{N})$, l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum |a_n|^2$ soit convergente.

D'abord $\ell^2(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe des suites à valeurs complexes. En effet il est non vide ; de plus si $a, b \in \ell^2(\mathbb{N})$, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$ (grâce à l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}^n$) :

$$\sqrt{\sum_{n=}^{N} |a_n + b_n|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |a_n^2|} + \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |b_n^2|} \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^2|} + \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |b_n^2|},$$

ce qui montre que $a + b \in \ell^2(\mathbb{N})$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, on vérifie immédiatement que $\lambda a \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Cela étant on définit sur $\ell^2(\mathbb{N})$ une forme hermitienne définie positive en posant :

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n.$$

En effet la série $\sum \overline{a_n} b_n$ est absolument convergente grâce à l'inégalité $|a_n b_n| \leqslant |a_n|^2 + |b_n|^2$.

Vérifier que l'on a bien défini une forme hermitienne définie positive.

Montrons maintenant que $\ell^2(\mathbb{N})$, muni de la norme associée, est complet. Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N})$, avec $A_m = (a_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Dire que cette suite est de Cauchy signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M \in \mathbb{N}$tel que si $p, q > M$, alors

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n^{(p)} - a_n^{(q)} \right|} < \varepsilon(*).$$

En particulier, on a $\left|a_n^{(p)} - a_n^{(q)}\right| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci montre que, pour tout n fixé, $(a_n^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$; elle converge donc vers une limite $a_n \in \mathbb{C}$. Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On va montrer que la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers A dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

Grâce à (*), on a quelque soit $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \left|a_n^{(p)} - a_n^{(q)}\right| < \varepsilon^2,$$

et en faisant tendre q vers l'infini, il vient $\sum_{n=0}^{N} \left|a_n^{(p)} - a_n\right| < \varepsilon^2$, d'où il résulte que $(a_n^{(p)} - a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et donc $A \in \ell^2(\mathbb{N})$. De plus $\left\|A_p - A\right\| < \varepsilon$, d'où la convergence de $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vers A.

8.2. Projection orthogonale sur un sous-espace complet

Soit A un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien H. On pose $A^\perp = \{x \in H \,|\langle h, a\rangle = 0$ pou
<u>Montrer que</u> $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

THÉORÈME 8.2.1. *Soit H un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel complet de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F) = \inf_{z\in F} \|x - z\|$.*

Remarque. Dans cet énoncé, on peut remplacer F par une partie convexe complète non vide de H.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in H$ et soit $\alpha = d(x, F)$. Posons

$$F_n = \left\{z \in F \,\middle|\, d(x, z) \leqslant \alpha + \frac{1}{n}\right\} = F \cap \widetilde{B}(x, \alpha + \frac{1}{n}).$$

Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de parties fermées emboîtées non vides de F. Montrons que $\operatorname{diam}(F_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Soient $z_1, z_2 \in F_n$; alors, grâce à l'inégalité du parallélogramme, on a

$$\left\|(x-z_1)+(x-z_2)\right\|^2 + \left\|(x-z_1)-(x-z_2)\right\|^2 = 2\left(\left\|x-z_1\right\|^2 + \left\|x-z_2\right\|^2\right)$$

$$4\left\|x-(\frac{z_1+z_2}{2})\right\|^2 + \left\|z_1-z_2\right\|^2 = \leqslant 4\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Puisque $\frac{1}{2}(z_1+z_2) \in F$, on a

$$4\alpha^2 + \left\|z_1-z_2\right\|^2 \leqslant 4\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^2$$

et donc $\operatorname{diam} F_n \leqslant 4\left[\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^2 - \alpha^2\right]$. D'où le résultat cherché.

Puisque F est complet, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. En fait cette intersection est réduite à un élément y qui est le seul tel que $d(x,y)=\alpha$. $\square$

Définition. L'élément obtenu dans le théorème précédent s'appelle la projection orthogonale de x sur F et on le note $P_F(x)$.

Proposition 8.2.2. *Si $x \in H$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $z \in F$ tel que $x-z$ soit orthogonal à F.*

Démonstration. (Dans le cas où H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) Si $\xi \in F$, on a

$$\left\|x-(P_F(x)-t\cdot\xi)\right\|^2 = \left\|x-P_F(x)\right\|^2 - 2t\left\langle x-P_F(x),\xi\right\rangle + t^2\left\|\xi\right\|^2$$

et, d'après le théorème 8.2.1, ce trinôme du second degré atteint son minimum pour $t=0$. Il en résulte que $\left\langle x-P_F(x),\xi\right\rangle = 0$.

Grâce au théorème de Pythagore, on vérifie facilement que si un élément $z \in F$ est tel que $x - z \in F^\perp$, il réalise la distance de x à F. En effet si $z' \in F$, on a

$$\|x - z'\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - z'\|^2 \geqslant \|x - z\|^2.$$

□

COROLLAIRE 8.2.3. *On a $F \oplus F^\perp = H$.*

DÉMONSTRATION. Si $x \in H$, on peut écrire $x = P_F(x) + x - P_F(x)$, où $P_f(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$ par définition de la projection orthogonale. De plus $F \cap F^\perp = \{0\}$ (**pourquoi ?**). □

COROLLAIRE 8.2.4. *L'application $x \mapsto P_F(x)$ de H dans H est linéaire et continue. Sa norme vaut* 1 *si $F \neq \{0\}$, son image est F et son noyau $F^\perp$.*

DÉMONSTRATION. On remarque que $(x+y) - (P_F(x) + P_F(y)) \in F^\perp$, donc $P_F(x+y) = P_F(x) + P_F(y)$. De même on a $\lambda \cdot x - \lambda \cdot P_F(x) \in F$, d'où $P_F(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot P_F(x)$.

D'autre part, à l'aide du théorème de Pythagore on a

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$$

donc $\|P_F(x)\| \leqslant \|x\|$ et par suite $|||P_F||| \leqslant 1$. Par ailleurs si $x \in F$ on a $P_F(x) = x$, donc si $F \neq \{0\}$, on en déduit que $|||P_F||| = 1$. □

THÉORÈME 8.2.5. (Riesz) *Soit H un espace de Hilbert et $l \in \mathscr{L}(H, \mathbb{K})$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $a \in H$ tel que $l(x) = \langle a, x\rangle$ pour tout $x \in H$; de plus $\|a\| = |||l|||$.*

DÉMONSTRATION. Unicité. Supposons que a et a' sont deux éléments de H qui conviennent. On a en particulier $l(a - a') = \langle a, a - a'\rangle = \langle a', a - a'\rangle$, donc $\langle a - a', a - a'\rangle = 0$ d'où $a = a'$.

Existence. Si $l = 0$, il suffit de prendre $a = 0$. Sinon $\ker(l)$, qui est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace complet, est complet. Comme $\ker(l) \neq H$, il existe $b \in \ker(l)^\perp \setminus \{0\}$. Si $x \in \ker(l)^\perp$, on a $x - \frac{l(x)}{l(b)} \cdot b \in \ker(l)^\perp$ et $l\left(x - \frac{l(x)}{l(b)} \cdot b\right) = 0$, par conséquent $x = \frac{l(x)}{l(b)} \cdot b$. Ainsi $\dim(\ker(l)^\perp) = 1$.

Les applications l et $x \mapsto \langle b, x\rangle$ sont linéaires ; elles sont nulles sur $\ker(l)$ et si $x \in \ker(l)^\perp$, on $\langle b, x\rangle = \left\langle b, \frac{l(x)}{l(b)} \cdot b\right\rangle = \frac{\|b\|^2}{l(b)} l(x)$. Le vecteur $a = \frac{\overline{l(b)}}{\|b\|^2} b$ convient. $\square$

8.3. Systèmes orthogonaux (orthonormés) d'un espace préhilbertien

Définition 8.3.1. Soit H un espace préhilbertien. On dit qu'une famille $(h_i)_{i\in I}$ est un système orthogonal si $\left\langle h_i, h_j\right\rangle = 0$ si $i \neq j$ et que c'est un système orthonormé si, en plus d'être un système orthogonal, elle vérifie $\|h_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Remarque. Si $(h_i)_{i\in I}$ est un système orthogonal formé d'éléments non nuls, alors $(h_i/\|h_i\|)_{i\in I}$ est un système orthonormé.

Exemple. Pour $\mathscr{D}$, l'ensemble des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes continues à gauche, la famille $(\exp(inx)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormé et $(\cos nx, \sin nx)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthogonal pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Nous allons d'abord traduire de façon plus explicite la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension fine.

Proposition 8.3.2. *Soit H un espace préhilbertien et soit F un sous-espace vectoriel de H de* dimension finie. *Si F admet une base orthonormée $\{e_1, \cdots, e_n\}$ alors*

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle \cdot e_i$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que $\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,x\rangle\cdot e_i\in F$; de plus $x-\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,x\rangle\cdot e_i\in F^{\perp}$ car

$$\begin{array}{rcl}\left\langle e_j, x-\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,x\rangle\cdot e_i\right\rangle & = & \left\langle e_j,x\right\rangle-\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,x\rangle\left\langle e_j,e_i\right\rangle\\ & = & \left\langle e_j,x\right\rangle-\left\langle e_j,x\right\rangle\\ & = & 0.\end{array}$$

□

Application. Dans $\mathscr{D}$, on considère le sous-espace vectoriel engendré par $(\exp(inx))_{-N\leqslant n\leqslant N}$; alors l'élément de F qui se trouve à distance minimun (dans $\mathscr{D}$) de $f\in\mathscr{D}$ est de la forme

$$\sum_{-N}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-int)f(t)dt\right)\exp(int).$$

On reconnaît le n-ième coefficient de Fourier $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-int)f(t)dt$ de la fonction f.

Autrement dit soit $f\in\mathscr{D}$ et $c_0+\sum_{n\geqslant1}\left(c_n\exp(inx)+c_{-n}\exp(-inx)\right)$ sa série de Fourier. Alors $c_0+\sum_{n=1}^{N}\left(c_n\exp(inx)+c_{-n}\exp(-inx)\right)$ est l'élément de F qui réalise la meilleure approximation de f dans F.

COROLLAIRE 8.3.3. *Soit H un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé de H. Alors pour tout $x\in H$ et toute partie finie $J\subset I$, on a*

$$\sum_{i\in J}\left|\langle e_i,x\rangle\right|^2\leqslant\|x\|^2.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer le sous-espace F engendré par la famille $(e_i)_{i\in J}$ et de remarquer que, par le Théorème de Pythagore, $\|x\|^2\geqslant\|P_F(x)\|^2$. □

Remarque. L'ensemble $\tilde{I}=\{i\in I\,|\,\langle e_i,x\rangle\neq0\}$ est dénombrable(**pourquoi ?**).

– Si cet ensemble est fini, on pose par définition

$$\sum_{i\in I}\left|\langle e_i, x\rangle\right|^2 = \sum_{i\in I,\langle e_i,x\rangle\neq 0}\left|\langle e_i, x\rangle\right|^2 .$$

– S'il est infini, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\tilde{I}$ et la somme de la série ainsi construite ne dépend pas de la bijection choisie. On note cette par $\sum_{i\in I}\left|\langle e_i, x\rangle\right|^2$ et on a

$$\sum_{i\in I}\left|\langle e_i, x\rangle\right|^2 = \sup_{J\subset I, J\text{fini}}\sum_{i\in J}\left|\langle e_i, x\rangle\right|^2 .$$

Ces remarques étant faites, on a

COROLLAIRE 8.3.4. *Soit H un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ une système orthonormé de H. Alors, pour tout $x \in H$, on a l'inégalité de Bessel*

$$\sum_{i\in J}\left|\langle e_i, x\rangle\right|^2 \leqslant \|x\|^2 .$$

Application. Si $f \in \mathscr{D}$ a pour série de Fourier $c_0 + \sum_{n\geqslant 1}\left(c_n \exp(inx) + c_{-n}\exp(-inx)\right)$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|c_n\right|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(t)\right|^2 dt.$$

On va montrer que si le système orthonormé est "suffisamment vaste", cette inégalité devient une égalité.

DÉFINITION 8.3.5. soit H un espace préhilbertien. On dit qu'un système orthonormé $(h_i)_{i\in I}$ est <u>total</u> si l'espace vectoriel qu'il engendre est dense dans H.

COROLLAIRE 8.3.6. *Soit H un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormée total de H. Alors, pour tout $x \in H$, on a l'identité de Parseval*

$$\sum_{i\in J} |\langle e_i, x\rangle|^2 = \|x\|^2 .$$

DÉMONSTRATION. Puisque x est la limite dans H d'une suite de combinaisons linéaires finie d'éléments e_i, $i \in I$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que la distance de x au sous-espace vectoriel F_J engendré par $(e_i)_{i\in J}$ soit inférieure à ε ; ceci entraîne que $\|x - P_F(x)\|^2 < \varepsilon$, donc (Théorème de Pythagore) $\|x\|^2 - \|P_F(x)\|^2 < \varepsilon^2$ ou encore $\|x\|^2 - \sum_{i\in J} |\langle e_i, x\rangle|^2 < \varepsilon^2$. Il en résulte à fortiori que $\|x\|^2 < \varepsilon^2 + \sum_{i\in I} |\langle e_i, x\rangle|^2$ et ceci pour tout $\varepsilon > 0$; par conséquent $\|x\|^2 \leqslant \sum_{i\in I} |\langle e_i, x\rangle|^2$, d'où l'égalité cherchée à l'aide de l'inégalité de Bessel. □

Nous allons en fait montrer que $(\exp(inx)_{n\in\mathbb{Z}}$ est système orthonormé total dans $\mathscr{D}$, à l'aide du théorème de Stone-Weierstrass.

LEMME 8.3.7. *Si $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, alors l'ensemble A des fonctions $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ de la forme*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n,$$

où les a_n sont des nombres complexes, est dense dans $\mathscr{C}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

DÉMONSTRATION. D'abord, A contient les constantes ; comme $z \mapsto z$ appartient à A, A sépare les points de $\mathbb{U}$. De plus, la somme, le produit deux éléments de A appartient à A. Enfin, si $f \in A$, on a $\overline{f} \in A$: pour le voir remarquons d'abord que si $|z| = 1$, on a $\overline{z} = 1/z \in \mathbb{U}$; donc pour $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, on a $\overline{f}(z) = \sum_{n=-N}^{N} \overline{a_n} z^{-n}$, d'où $\overline{f} \in A$.

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, on a donc $\overline{A} = \mathscr{C}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$. $\square$

LEMME 8.3.8. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. Il existe alors une fonction continue $\widetilde{f} : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ telle que $f(t) = \widetilde{f}(\exp(\imath t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $z_0 \in \mathbb{U}$ et soit E l'application $t \mapsto \exp(\imath t)$; alors $E^{-1}(z_0) = \{t_0\} + 2\pi\mathbb{Z}$. Si f est 2π-périodique, alors f prend la même valeur en tous les points de $E^{-1}(z_0)$ et on peut donc poser $\widetilde{f}(z_0) = f(t)$ pour un $t \in E^{-1}(z_0)$.

Montrons que si f est continue sur $\mathbb{R}$, $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathbb{U}$. Soit $z_0 = \exp(\imath t_0) \in \mathbb{U}$ et considérons $E_{|[t_0-\pi/4, t_0+\pi/4]}$; c'est une application continue de $[t_0 - \pi/4, t_0 + \pi/4]$ sur un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{U}$; comme de plus elle est injective et que l'espace de départ est compact, c'est un homéomorphisme. L'application $f \circ E^{-1}_{|[t_0-\pi/4, t_0+\pi/4]} : V \to \mathbb{C}$ coïncide avec $\widetilde{f}_{|V}$, ce qui prouve que f est continue en z_0. $\square$

PROPOSITION 8.3.9. *Toute une fonction 2π-périodique, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme précédent, il existe une fonction continue $\widetilde{f} : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ telle que $f(t) = \exp(\imath t)$. D'autre part, d'après le lemme 8.3.7, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in A$ tel que $\| p - f \| < \varepsilon$, d'où il résulte que f est bien une limite uniforme de polynômes trigonométriques. $\square$

COROLLAIRE 8.3.10. *La famille $(\exp(\imath nt))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormé total dans $\mathscr{D}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathscr{L}$ l'espace vectoriel engendré par $(\exp(\imath nt))_{n\in\mathbb{Z}}$. D'après le lemme précédent, si f est une fonction continue 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on a $f \in \overline{\mathscr{L}}$ (car $|| p - f|| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(t) - f(t)|^2 dt} \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - p(t)|$).

Montrons que toute fonction $f \in \mathscr{D}$ est limite, pour la norme du produit scalaire, d'une suite de fonctions continues.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit continue en ce point et notons par $a_1 < \cdots < a_k$les points de discontinuité de f dans l'intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

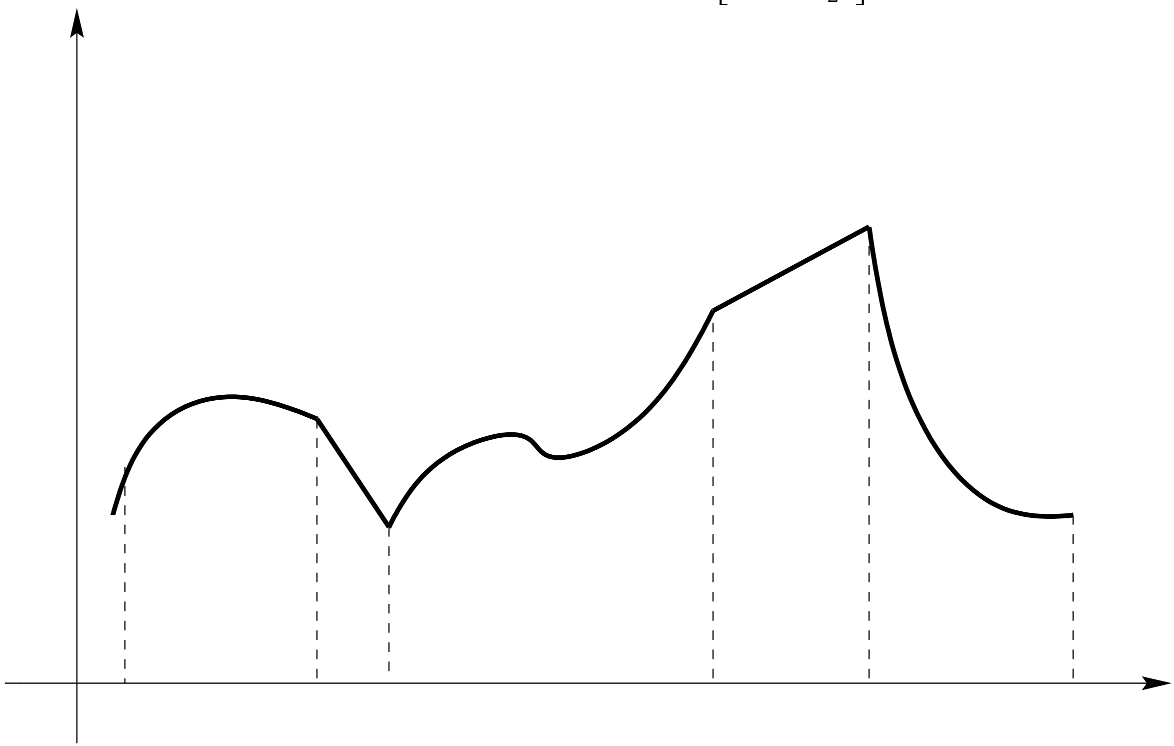
Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a

$$a_1 < a_1 + \frac{1}{2^n} < a_2 < a_2 + \frac{1}{2^n} < \cdots < a_k < a_k + \frac{1}{2^n} < \alpha + 2\pi.$$

On considère alors la fonction f_n continue, 2π-périodique, qui est définie de la comme suit sur $[\alpha, \alpha + 2\pi[$:

$$f_{n|[\alpha,a_1]} = f_{|[\alpha,a_1]}; \ f_{n|\left[a_i+\frac{1}{2^n},a_{i+1}\right]} = f_{|\left[a_i+\frac{1}{2^n},a_{i+1}\right]} \text{ pour } i = 1, \cdots, k-1,$$

et f_n est affine en restriction à chacun des intervalles $\left[a_i, a_i+\frac{1}{2^n}\right]$; ce qui ressemble à ceci :



On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(t)-f_n(t)\right|^2 dt &= \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left|f(t)-f_n(t)\right|^2 dt\\
&= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2\pi}\int_{ai}^{a_i+\frac{1}{2^n}}\left|f(t)-f_n(t)\right| dt\\
&\leqslant \frac{k}{2^{n+1}\pi}\times\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f(t)\right|^2,
\end{aligned}$$

expression qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par conséquent $\overline{\mathscr{L}} = \mathscr{D}$. $\square$

Application. Soit $f \in \mathscr{D}$ et $c_0 + \sum_{n\geqslant 1}\left(c_n \exp(\imath nx) + c_{-n}\exp(-\imath nx)\right)$ sa série de Fourier. Alors f est limite dans $\mathscr{D}$ de $\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(\imath nt)\right)_{N\geqslant 1}$, autrement dit

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(\imath nt)\right|^2 dt\right)^{1/2} \xrightarrow[N\to\{]{} \infty 0$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt.$$

INTERPRETATION Soit $\ell^2(\mathbb{Z})$ est l'espace de Hilbert des suites de nombres complexes $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |a_{-n}|^2\right)$ converge, muni du produit scalaire $\langle a, b\rangle = \overline{a_0}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\overline{a_n}b_n + \overline{a_{-n}}b_{-n})$. On a une application de $\mathscr{D}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui associe à toute fonction la suite de ses coefficients de Fourier. Cette application est injective et est une <u>isométrie</u>. Autrement dit, $\mathscr{D}$ peut (avec cette application), être identifié à un sous-espace de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

En fait ce phénomène est assez général :

PROPOSITION 8.3.11. *Soit H un espace préhilbertien séparable (c'est-à-dire muni d'une partie dénombrable dense). Alors H s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N})$.*

Si de plus, H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, alors il s'identifie soit à $\mathbb{K}^n$ muni de la norme $\left(\sum |x_i|^2\right)$, soit à $\ell^2(\mathbb{N})$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer ce résultat, montrons d'abord que H admet un système orthonormé total dénombrable. Soit donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans H. Pour tout n, soit F_n le sous-espace vectoriel, de dimension finie, engendré par $(h_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$; on a $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$. Posons $e_0 = h_0 / \|h_0\|$ et soit n_1 le premier entier $n > 0$ tel que $F_n \neq F_0$; si on pose $e_1 = (h_{n_1} - P_{F_0}(h_{n_1})) / \|h_{n_1} - P_{F_0}(h_{n_1})\|$, alors $\{e_0, e_1\}$ est une base orthonormée de F_{n_1}. De proche en proche, on construit ainsi (c'est le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) soit une séquence finie $\{e_0, \cdots, e_n\}$ qui constitue une base de tous les sous-espaces F_p pour p assez grand et par suite une base de H, soit une séquence infinie $\{e_0, \cdots, e_n, \cdots\}$ telle que chaque F_n ait pour base $\{e_0, \cdots, e_n\}$ et dans ce cas cette séquence est totale.

Cela étant, si $H = \{0\}$ l'identification est immédiate ; sinon, H possède un système orthonormé total fini $\{e_0, \cdots, e_N\}$ ou infini $\{e_0, \cdots, e_n, \cdots\}$.

A $x \in H$ on associe la suite $\phi(x) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans le premier cas par :

$$a_n = \begin{cases} \langle e_n, x\rangle & \text{si} \quad n \leqslant N \\ 0 & \text{si} \quad n > N \end{cases}$$

et dans le second cas par :

$$a_n = \langle e_n, x\rangle \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

L'application $\phi : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ ainsi définie est une application linéaire qui est une isométrie grâce à l'identité de Parseval. Cela démontre la première partie de l'énoncé.

Si on suppose de plus que H est un espace de Hilbert (c'est-à-dire qu'il est complet), on voit que dans le premier cas ci-dessus $H = \mathbb{K}^N$.

Dans le second cas, on va montrer que ϕ est surjective. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ (c'est-à-dire que la série $\sum \left|a_n^2\right|$ converge) et considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$d'éléments de H définis par $x_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e_i$. C'est une suite de Cauchy car

$$\left\|x_p - x_q\right\|^2 = \sum_{i=p+1}^{q} |a_i|^2$$

d'après le théorème de Pythagore ; elle converge donc vers un élément $x \in H$. On a alors

$$\langle e_i, x \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle e_i, x_n \rangle = a_i$$

autrement dit $\phi(x) = a$.

$\square$

CHAPITRE 9

L'exemple de l'espace métrique $\mathbb{R}$

9.1. Premières définitions

Dans $\mathbb{R}$ on a une "distance" naturelle : si $x, y \in \mathbb{R}$, la "distance" de x à y est $|x - y|$.

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ à distance strictement inférieure à r est $]x_0 - r, x_0 + r[$ et l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ à distance inférieure ou égale à r est $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Proposition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
i) il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que tout $x \in A$ vérifie $m \leqslant x \leqslant M$
ii) il existe $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ tel que $A \subset [x - r, x + r]$
iii) l'ensemble $\{|x - y| \mid x, y \in A\}$ est majoré
On dit alors que A est bornée.

On définit le diamètre de A par

$$\operatorname{diam}(A) = \sup \{|x - y| \mid x, y \in A\}.$$

En fait si A est bornée, $\operatorname{diam}(A) = \sup A - \inf A$. **Pourquoi ?**

Définition. On dit que A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in A$, il existe $r_x > 0$ tel que $A \supset]x - r_x, x + r_x[$. (Intuitivement aucun point de A n'est au "bord" de A.)

Exemple : $]a, b[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. (De l'aide ?)

Propriétés :

1) Une réunion de parties ouvertes de $\mathbb{R}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. (De l'aide ?)

2) Une intersection finie de parties ouvertes de $\mathbb{R}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. (De l'aide ?)

Mais $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}] - 1/n, 1/n[=$ **?**

Définition. On dit que A est une partie fermée de $\mathbb{R}$ si $\complement_{\mathbb{R}} A$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. (Intuitivement les points du "bord" de A sont contenus dans A.)

Enoncer des propriétés analogues aux propriétés ci-dessus pour les fermés. (De l'aide ?)

Exemples :

$[a, b]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

$[a, b[$ est une partie qui n'est ni ouverte, ni fermée de $\mathbb{R}$.

Il est très important de remarquer que dire que A n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ ne signifie pas que A est fermé dans $\mathbb{R}$.

On va donner maintenant un sens mathématique au “bord” d'une partie.

Définition. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ on dit que le point $x \in \mathbb{R}$ est un *point frontière* de A si pour tout $r > 0$, $]x - r, x + r[$ rencontre à la fois A et son complémentaire. La *frontière* de A est l'ensemble des points frontières et on le note $\mathrm{Fr}A$ ou ∂A.

Remarquons que la définition implique que $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}\,\complement_{\mathbb{R}} A$. On a alors

$$A \text{ ouvert} \Longleftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}A = \emptyset$$
$$A \text{ fermé} \Longleftrightarrow A \supset \mathrm{Fr}A.$$

Définition. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ on appelle intérieur de A l'ensemble $\overset{\circ}{A} = A \setminus \mathrm{Fr}A$ et adhérence de A l'ensemble $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}A$.

Donner une caractérisation des points de l'intérieur de A et des points de l'adhérence de A. (De l'aide ?)

Déterminer la frontière, l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble $\{0\} \cup]1, 2]$. (De l'aide ?)

Caractérisation des fermés en termes de suites

Proposition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
i) A est une partie fermée de $\mathbb{R}$
ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge dans $\mathbb{R}$ vers x, alors x appartient à A.

Démonstration. $i) \Rightarrow ii)$. Par définition de la limite d'une suite, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge dans $\mathbb{R}$ vers x on a $x \in \overline{A}$ et comme A est une partie fermée de $\mathbb{R}$ on obtient $x \in A$.

$i) \Rightarrow ii)$. Si $x \in \overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge dans $\mathbb{R}$ vers x **(Pourquoi ?)** et d'après ii) $\overline{A} \subset A$ donc A est une partie fermée de $\mathbb{R}$. □

9.2. Parties compactes de $\mathbb{R}$

9.2.1. Deux résultats concernant un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$

Nous allons dégager deux propriétés d'un intervalle $[a,\ b]$ de $\mathbb{R}$. Ces propriétés ont des conséquences très importantes pour le comportement des fonctions continues sur $[a,\ b]$.

Théorème 9.2.1. (Bolzano-Weierstrass) *Soit $[a,\ b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ (muni de la distance usuelle). De toute suite (x_n) de points de $[a,\ b]$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point x de $[a,\ b]$.*

Démonstration. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et considérons l'ensemble

$$\left\{p \in \mathbb{N} \mid x_p \in \left[a_0,\ \frac{a_0+b_0}{2}\right]\right\};$$

s'il est infini on définit $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ sinon on définit $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, $b_1 = b_0$. On remarque $\left\{p \in \mathbb{N} \mid x_p \in [a_1,\ b_1]\right\}$ est infini.

En réitérant le procédé, on construit une suite d'intervalles fermés bornés $([a_n,\ b_n])_{n\geqslant 0}$ tels que $[a_n,\ b_n] \supset [a_{n+1},\ b_{n+1}]$ et $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,\ b_n] \neq \emptyset$ et en fait $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,\ b_n] = \{\xi\}$ (**pourquoi ?**).

Montrons qu'il existe une sous-suite de la suite (x_n) qui converge vers ξ. Pour cela on pose $\varphi(0) = 0$ et, si $\varphi(i)$ est défini pour $0 \leqslant i \leqslant k$, on pose

$$\varphi(k+1) = \min\left\{p \in \mathbb{N} \mid p > \varphi(k) \text{ et } x_p \in [a_{k+1},\ b_{k+1}]\right\}.$$

L'application φ est strictement croissante et la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ (**pourquoi ?**).

□

Donnons maintenant une propriété plus ‘"géométrique".

Définition 9.2.2. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle *recouvrement ouvert* de A une famille $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes de $\mathbb{R}$ telles que $\bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i \supset A$.

On dit que le recouvrement est *fini* si l'ensemble I des indices est fini.

On appelle *recouvrement extrait* du recouvrement $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ de A un recouvrement $(\mathscr{O}_i)_{i\in J}$ de A avec $J \subset I$.

Théorème 9.2.3. (Borel-Lebesgue) *Soit $[a,\ b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$; alors de tout recouvrement ouvert de $[a,\ b]$, on peut extraire un recouvrement fini.*

Démonstration. Soit $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[a,\ b]$ et considérons l'ensemble

$$\Omega = \left\{x \in [a,\ b] \,\middle|\, [a,\ x] \text{ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts du recouvrement}\right\}.$$

On veut montrer que $b \in \Omega$.

Comme Ω est une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ ($a \in \Omega$), $s = \sup(\Omega)$ existe et appartient à $[a,\ b]$. Montrons que $s \in \Omega$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $s \in \mathscr{O}_{i_0}$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]s-\varepsilon,\ s+\varepsilon[\, \cap [a,\ b] \subset \mathscr{O}_{i_0}$. Par définition de la borne supérieure de Ω, il existe $\xi \in \Omega \cap\,]s-\varepsilon,\ s+\varepsilon[$, donc il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $[a,\ \xi] \subset \bigcup_{i\in J} \mathscr{O}_i$ et alors $[a,\ s] \subset \bigcup_{i\in J\cup\{i_0\}} \mathscr{O}_i$.

Montrons que $s = b$. Si ce n'était pas le cas, il existerait un entier $n > 1$ tel que $s + \varepsilon/n \leqslant b$ et $[a,\ s+\varepsilon/n]$ serait recouvert par un nombre fini d'ouverts du recouvrement, ce qui est en contradiction avec le fait que $s = \sup(\Omega)$. □

Ces deux propriétés sont en fait, malgré les apparences, deux versions d'une même propriété.

9.2.2. Parties compactes de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 9.2.4. iOn dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *compacte* si de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un recouvrement fini.

Exemple. Le théorème de Borel-Lebesgue implique que tout intervalle fermé borné $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ est compact.

PROPOSITION 9.2.5. *Les parties compactes de $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, sont les parties fermée bornées.*

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord la condition nécessaire. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, considérons le recouvrement ouvert suivant : $(]x-1, x+1[)_{x\in K}$; on peut en extraire un sous recouvrement fini de cardinal n. Par conséquent K est borné **(pourquoi ?)**. Si K n'est pas fermé, il existe un point ξ dans $\overline{K}$ qui n'appartient pas K. On peut alors considérer le recouvrement ouvert de K suivant : $(\mathbb{R} \setminus [\xi - 1/n, \xi + 1/n])_{n\in bbN}$. La partie K étant compacte, on peut en extraire un sous recouvrement fini. Il existe alors n_0 tel que $]\xi - 1/n_0, \xi + 1/n_0[$ ne rencontre pas K, ce qui contredit le fait que $\xi \in \overline{K}$.

Pour la condition suffisante, on adapte la démonstration du Théorème 9.2.3. Soit K une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ et $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K. Considérons l'ensemble

$$\Omega = \big\{x \in]-\infty,\ b] \;\big|\;]-\infty,\ x] \text{ peut être recouvert} \\ \text{par un nombre fini d'ouverts du recouvrement}\big\}. \tag{9.2.1}$$

On veut montrer que $\sup(K) \in \Omega$. L'ensemble Ω est non vide (il contient $\inf(K)$) et majoré car K est borné ; soit $s = \sup \Omega$. Le point s est un élément de Ω (la démonstration est la même que dans le cas d'un intervalle, cf. Théorème 9.2.3).

Si s ne coïncide pas avec $\sup K$, alors $\{x \in K \setminus \Omega\} \neq \emptyset$ et il a une borne inférieure (**pourquoi ?**), notons $t = \inf\{x \in K \setminus \Omega\}$, on a $t \geqslant s$ (la différence avec le cas de l'intervalle est que t peut-être différent de s). Si $s = t$ il suffit de suivre la fin de la démonstration du Théorème 9.2.3 ; sinon on remarque que $]s, t[\cap K = \emptyset$ et puisque $t \in O_{i_0}$ (**pourquoi ?**), $t \in \Omega$ d'où une contradiction. □

COROLLAIRE 9.2.6. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est compacte si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n\in bbN}$ de points de A , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point x de A ;* c'est la propriété de Bolzano-Weierstrass.

DÉMONSTRATION. Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}$, elle est fermée et bornée. En particulier A est contenue dans une intervalle $[a, b]$. Si $(x_n)_{n\in bbN}$ est une suite de points de A , d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un point x de $[a, b]$ et comme A est fermée $x \in A$.

Réciproquement supposons que A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass. Nous allons montrer que A est fermée et bornée et donc compacte.

Soit $(x_n)_{n\in bbN}$ est une suite de points de A qui converge vers un point x de $\mathbb{R}$. Toute suite extraite converge alors aussi vers x et par hypothèse $x \in A$, donc A est fermée.

Supposons que A n'est pas bornée, on peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in bbN}$ de points de A qui vérifie $|x_n| > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite ne possède pas de sous-suite convergente, ce qui contredit la propriété de Bolzano-Weierstrass. □

9.3. Parties connexes de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 9.3.1. Une partie $A \subset bbR$ est connexe si et seulement si, pour tout couple (U_1, U_2) d'ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset U_1 \cup U_2$, on a soit $A \cap U_1 = \emptyset$ soit $A \cap U_2 = \emptyset$.

LEMME 9.3.2. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Montrons que si J n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, alors J n'est pas connexe. En effet, il existe $c \in \mathbb{R} \setminus J$ tel que $]-\infty,\ c[\cap J$ et $]c,\ +\infty[\cap J$ soient non vides. Comme il s'agit évidemment de parties ouvertes fermées disjointes de J, J n'est pas connexe. □

LEMME 9.3.3. *Tout intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$. Supposons que I n'est pas connexe. Soit $(U_1,\ U_2)$ un couple d'ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ tels que $I \subset U_1 \cup U_2$, et que $I \cap U_1$ et $I \cap U_2$ soient tous deux non vides. Supposons par exemple que $a \in U_1$ et notons c la borne supérieure de l'ensemble $\{x \in [a, b] | [a, x] \subset U_1\}$, alors $c \in I \cap U_1$ (**pourquoi ?**). Par hypothèse $I \cap U_2$ est non vide et minoré, soit d sa borne inférieure, alors $d \in I \cap U_2$ et $c \leqslant d$ (**pourquoi ?**). Puisque I est un intervalle, on a $c = d$ (**pourquoi ?**), ce qui contredit le fait que U_1 et U_2 sont disjoints. □

THÉORÈME 9.3.4. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$. En particulier $\mathbb{R}$ est connexe.*

DÉMONSTRATION. Le Lemme 9.3.2 prouve que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

Soit maintenant I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $I = \emptyset$, il est connexe. Sinon, si $x_0 \in I$, on a $I = \bigcup_{x \in I} K_x$ où

$$K_x = \begin{cases} [x_0,\ x] & \text{si} \quad x \geqslant x_0 \\ [x,\ x_0] & \text{si} \quad x < x_0 \end{cases} .$$

Supposons que I n'est pas connexe. Soit $(U_1,\ U_2)$ un couple d'ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ tels que $I \subset U_1 \cup U_2$, et que $I \cap U_1$ et $I \cap U_2$ soient tous deux non vides. Supposons par exemple que

$x_0 \in U_1$ et soit y un point de $I \cap U_2$. Considérons l'intervalle $[x_0,\ y]$, il est connexe d'après le Lemme 9.3.3, mais $[x_0,\ y] \cap U_1$ et $[x_0,\ y] \cap U_2$ sont tous deux non vides, d'où la contradiction. □

9.4. Fonctions continues sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est continue en un point $x_0 \in A$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

On dira que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

THÉORÈME 9.4.1. *Toute fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

DÉMONSTRATION. Soit I une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$. Nous devons prouver que $f(K)$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$. D'après le Corollaire 9.2.6, il suffit de montrer que $f(K)$ possède la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit $(y_n)_{n \in bbN}$ une suite de points de $f(K)$; il existe alors une suite $(x_n)_{n \in bbN}$ de points de K qui vérifie $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in bbN}$ de la suite $(x_n)_{n \in bbN}$ qui converge vers un point x de I. L'application f étant continue, la suite $(y_{n_k} = f(x_{n_k}))_{k \in bbN}$ converge vers $f(x)$, d'où le résultat. □

THÉORÈME 9.4.2. *(*Théorème des valeurs intermédiaires*) Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et toute application continue $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, l'image $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient $M = \sup f(I)$ et $m = \inf f(I)$, il suffit de prouver que f prend toutes les valeurs de l'intervalle $]m, M[$ **(pourquoi ?)**.

Si $m = M$, la fonction f est constante et le résultat immédiat. Sinon fixons r vérifiant $m < r < M$. Les propriétés des bornes inférieures et supérieures entraînent l'existence de points a et b de I vérifiant

$$m \leqslant f(a) < r < f(b) \leqslant M.$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $a < b$. L'ensemble Ω des $x \in [a, b]$ qui vérifient $f(x) \leqslant r$ est non vide (il contient a) et majoré par b, il admet donc une borne supérieure que l'on notera c. Par définition de la borne supérieure, on peut construire une suite $(x_n)_{n \in bbN}$ d'éléments de Ω qui vérifie $c - 1/n < x_n \leqslant c$. Par conséquent cette suite converge vers c et puisque f est continue la suite $(f(x_n))_{n \in bbN}$ converge vers $f(c)$. De plus $f(x_n) \leqslant r$ pour tout $n \in bbn$, on a donc $f(c) \leqslant r$.

Puisque c est la borne supérieure de Ω, on a $f(x) > r$ pour tout $x \in]c, b]$. La limite à droite de f en c, qui vaut $f(c)$ par continuité de f, vérifie donc $f(c) \geqslant r$. Finalement on a $f(c) = r$. □

Remarque. Grâce à la caractérisation des connexes de $\mathbb{R}$ (Théorème 9.3.4), le théorème des valeurs intermédiaires peut se traduire par *l'image d'une partie connexe de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est une partie connexe de $\mathbb{R}$*. On peut donc le prouver aussi de la même manière que dans le cas des espaces métriques. Dans ce cas la démonstration est immédiate. En fait, tout le travail a consisté à montrer que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties connexes de $\mathbb{R}$.

Cet énoncé est équivalent à l'énoncé suivant.

Corollaire 9.4.3. *Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si on a $f(a) f(b) < 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

COROLLAIRE 9.4.4. *Pour tout intervalle fermé, borné I de $\mathbb{R}$ et toute application continue $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, l'image $f(I)$ est un intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. **Essayer de le montrer**. (De l'aide ?) $\square$

Application. Montrer que toute application continue f d'un intervalle fermé, borné $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet un point fixe, c.à.d qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Ce résultat est faux en général si l'intervalle de définition de f n'est pas fermé ! Donner un contre-e
pour $]0, 1]$.

CHAPITRE 10

Espaces topologiques

10.1. Topologie

DÉFINITION 10.1.1. On appelle *topologie* sur un ensemble E la donnée pour chaque point $x \in E$ d'un ensemble $\mathscr{V}(x)$ de parties de E vérifiant les propriétés suivantes :

V_1) a appartient à tout élément de $\mathscr{V}(a)$

V_2) Toute partie W de E qui contient un élément de $\mathscr{V}(a)$ est aussi un élément de $\mathscr{V}(a)$

V_3) Toute intersection finie d'éléments de $\mathscr{V}(a)$ est encore un élément de $\mathscr{V}(a)$.

V_4) Si $V \in \mathscr{V}(a)$, il existe un élément $W \in \mathscr{V}(a)$ tel que pour tout $b \in W$, on ait $V \in \mathscr{V}(b)$.

On dira que la topologie est *séparée* si la propriété de séparation est également satisfaite. Les éléments de $\mathscr{V}(x)$ sont appelés les *voisinages* de x.

Un ensemble muni d'une topologie est appelé un *espace topologique*.

Exemple. Un espace métrique est un espace topologique séparé. En particulier $\mathbb{R}$ avec sa distance usuelle est un espace topologique.

D'autres exemples. Soit E un ensemble :

1) *Topologie grossière* : pour tout $x \in E$, $\mathscr{V}(x) = \{E\}$.

2) On suppose E infini : pour tout $x \in E$ $\mathscr{V}(x) = \{V \in \mathfrak{P}(E) | x \in V,\ \complement_E V \text{ fini}\}$ (si $E = \mathbb{R}$ on l'appelle la topologie de Zariski de $\mathbb{R}$).

Vérifier que les exemples 1) et 2) définissent des topologies non séparées.

DÉFINITION 10.1.2. Dans un espace topologique E, on appelle système fondamental de voisinages d'un point x tout ensemble $\mathfrak{V}_x$ de voisinages de x tel que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathfrak{V}_x$ tel que $W \subset V$.

Remarque. On peut noter que la donnée pour chaque point x de E d'un système fondamental de voisinages permet de définir complètement la topologie : un voisinage de x étant alors toute partie de E contenant un élément du système fondamental.

Exemples. Soit E un ensemble et x un point de E :

1) topologie grossière : $\mathfrak{V}_x = \{E\}$.
2) Topologie discrète : $\mathfrak{V}_x = \{x\}$.
3) Soit $(E,\ d)$ un espace métrique. **Vérifier que** les familles suivantes sont des systèmes fondamentaux de voisinages de x :

$$\mathfrak{V}_x = \{B(x,\ r) |\ r > 0\},\ \mathfrak{V}_x = \left\{B(x,\ \frac{1}{n}) |\ n \in \mathbb{N}^*\right\},\ \mathfrak{V}_x = \left\{\widetilde{B}(x,\ \frac{1}{n}) |\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Remarque. Dans un espace métrique, tout point possède un système fondamental *dénombrable* de voisinages. Cette propriété est la raison pour laquelle les suites jouent un rôle fondamental dans l'étude des espaces métriques.

DÉFINITION 10.1.3. Un espace topologique E est dit métrisable s'il existe une distance sur E telle que la topologie associée à cette distance coïncide avec la topologie donnée. Une telle distance est dite compatible avec la topologie de E.

Exemple. On définit la droite numérique achevée par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \left\{-\infty,\ +\infty\right\}$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la topologie suivante :

– si $x \in \mathbb{R}$, $\mathscr{V}(x) = \left\{V \subset \overline{\mathbb{R}} \mid \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon,\ x+\varepsilon[\ \subset V\right\}$
– si $x = -\infty$, $\mathscr{V}(x) = \left\{V \subset \overline{\mathbb{R}} \mid \exists A \in \mathbb{R}\ \left\{y < A\right\} \subset V\right\}$
– si $x = +\infty$, $\mathscr{V}(x) = \left\{V \subset \overline{\mathbb{R}} \mid \exists A \in \mathbb{R}\ \left\{y > A\right\} \subset V\right\}$

Vérifier que $d(x,\ y) = \left|\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y\right|$ est distance compatible avec cette topologie.

Remarque. Il existe des topologies non métrisables, entre autres les topologies non séparées et les topologies pour lesquelles il n'y a pas de système fondamental dénombrable de voisinages.

10.2. Ouverts, fermés.

DÉFINITION 10.2.1. Soit E un espace topologique. Une partie U de E est une partie ouverte de E (ou un ouvert dans E) si U est un voisinage de chacun de chacun de ses points.

Propriétés des parties ouvertes d'un espace topologique.

(O_1) $\emptyset$ et E sont des parties ouvertes de E

(O_2) Toute réunion de parties ouvertes de E est encore une partie ouverte de E

(O_3) Toute intersection *finie* de parties ouvertes de E est encore une partie ouverte de E.

DÉMONSTRATION. Tout cela se déduit facilement de la définition d'une partie ouverte et des propriétés des voisinages. (On notera que l'ensemble vide n'ayant pas d'éléments est bien un voisinage de chacun de ses points). $\square$

PROPOSITION 10.2.2. *Soit E un espace topologique et x un point de E. Pour qu'une partie V de E contenant x soit un voisinage de x il faut et il suffit que V contienne une partie ouverte contenant x.*

DÉMONSTRATION. La condition est suffisante grâce à la propriété (V_2) des voisinages et à la définition d'une partie ouverte. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit V un voisinage de x. Notons O l'ensemble des $y \in V$ tels que V soit un voisinage de y. Alors $x \in O$ et il reste à prouver que O est une partie ouverte de E. Si $y \in O$, comme V est un voisinage de y, la propriété (V_4) implique qu'il existe un voisinage W de y tel que pour tout $z \in W$, V est un voisinage de z. Mais alors par définition de O on a $W \subset O$ et donc O est un voisinage de y grâce à la propriété (V_2), ce qui prouve bien que O est une partie ouverte de E. □

Nous allons voir maintenant que l'on peut également définir une topologie par la donnée de ses parties ouvertes.

PROPOSITION 10.2.3. *Soient E un ensemble et $\mathscr{O}$ un ensemble de parties de E qui vérifie (O_1), (O_2) et (O_3). Il existe alors sur E une et une seule topologie pour laquelle $\mathscr{O}$ est l'ensemble des parties ouvertes de E.*

DÉMONSTRATION. Si cette topologie existe, d'après la proposition 10.2.2, l'ensemble $\mathscr{V}(x)$ des voisinages de x est égal à l'ensemble des parties V de E qui contiennent un élément $O \in \mathscr{O}$ contenant x; d'où l'unicité de cette topologie.

Pour chaque $x \in E$, l'ensemble $\mathscr{V}(x)$ satisfait bien les conditions (V_1), (V_2) et (V_3) (**pourquoi ?**). Pour (V_4) cela résulte du fait que si $O \in \mathscr{O}$, alors pour tout $x \in O$ on a $O \in \mathscr{V}(x)$. Les $\mathscr{V}(x)$ définissent donc une topologie et il reste à voir si $\mathscr{O}$ est bien l'ensemble des parties ouvertes pour cette topologie. Il est clair que tout élément de $\mathscr{O}$ est une partie ouverte. Réciproquement soit U une partie ouverte, alors pour tout $x \in U$ il existe $O_x \in \mathscr{O}$ tel que $x \in O_x \subset U$ car $U \in \mathscr{V}(x)$ et donc $U = \bigcup_{x \in U} O_x$ appartient bien à $\mathscr{O}$ par la propriété (O_2). □

Définition 10.2.4. Soit E un espace topologique. On dit que $A \subset E$ est une partie fermée de E si $\complement_E A$ est une partie ouverte de E.

Exemple. **Vérifier que** dans un espace topologique séparé une partie réduite à un point est une partie fermée.

Remarque. Les parties d'un espace topologique ne sont pas comme des portes : elles peuvent être ouvertes **et** fermées (par exemples $\emptyset$ et E) et elles peuvent n'être **ni** ouvertes **ni** fermées.(

Propriétés des parties fermées d'un espace topologique E.

(F_1) $\emptyset$ et E sont des parties fermées de E.

(F_2) Toute intersection de parties fermées de E est une partie fermée de E.

(F_3) Toute union *finie* de parties fermées de E est une partie fermée de E.

Démonstration. Elles se déduisent de (O_1), (O_2) et (O_3) par passage au complémentaire. □

Remarque. On peut bien sûr définir également une topologie par la donnée d'un sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathfrak{P}(E)$ vérifiant les propriétés (F_1), (F_2) et (F_3). On obtient les ouverts par passage au complémentaire.

Attention ! : On ne dit pas qu'un espace topologique est ouvert ou fermé cela n'a pas de sens ! On dit qu'une partie A de E est une partie ouverte (resp. fermée) de E, cette partie pouvant être éventuellement l'ensemble E tout entier.

10.3. Intérieur, extérieur, frontière, adhérence

Dans tout ce paragraphe, E désignera un espace topologique quelconque.

Définition 10.3.1. Soit A une partie de E. On dit qu'un point $x \in E$ est *intérieur* à A si A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'*intérieur* de A et on le note $\overset{\circ}{A}$.

Proposition 10.3.2. *L'intérieur d'une partie A de E est un ouvert de E et c'est le plus grand ouvert de E contenu dans A.*

Démonstration. D'après la proposition 10.2.2 et la définition 10.3.1, un point x est intérieur à A s'il existe une partie ouverte contenue dans A et contenant x et de plus tout point de cette partie est intérieur à A ; il en résulte que $\overset{\circ}{A}$ est une réunion d'ensembles ouverts contenus dans A et c'est le plus grand ouvert contenu dans A. □

Propriétés élémentaires Vérifier, sur la page ci-contre, que si A et B sont des parties de E, on a :

1) si $A \subset B$ alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
2) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
3) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.
4) Donner un exemple où l'inclusion de 3) est stricte.

Définition 10.3.3. Soit A une partie de E. On dit qu'un point $x \in E$ est *extérieur* à A s'il existe un voisinage de x dans E ne rencontrant pas A. L'ensemble des points extérieurs à A s'appelle l'*extérieur* de A et on le note $\mathrm{ext}(A)$.

Remarque : $\mathrm{ext}(A) = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E A}}$.

Définition 10.3.4. Soit A une partie de E. On dit qu'un point $x \in E$ est *adhérent* à A si tout voisinage de x dans E rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et on le note $\overline{A}$.

Proposition 10.3.5. *L'adhérence de A est fermée et c'est le plus petit ensemble fermé de E contenant A. En particulier A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Démonstration. La relation $x \notin \overline{A}$ équivaut à $x \in \overbrace{\complement_E A}^{\circ}$, par conséquent $\overline{A}$ est fermé. De plus si F est une partie fermée de E contenant A, $\complement_E F$ est un ouvert de E contenu dans $\overbrace{\complement_E A}^{\circ}$, d'où $F \supset \overline{A}$. □

Définition 10.3.6. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. On dit que A est *dense* dans B si $B \subset \overline{A}$. On dit que A est *partout dense* si $\overline{A} = E$.

Définition 10.3.7. Si A est une partie de E, on dit que le point $x \in E$ est un point frontière de A si tout voisinage de x rencontre à la fois A et son complémentaire. La *frontière* de A est l'ensemble des points frontières et on le note $\mathrm{Fr}A$ ou ∂A.

Remarque. On a immédiatement $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\complement_E A}$ et donc la frontière de A est une partie fermée de E.

Terminons en récapitulant la situation :

Si E est un espace topologique et si A est une partie de E, on a :

1) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;

2) $E = \mathrm{Ext}A \cup \partial A \cup \mathring{A}$ et ces trois ensembles sont deux à deux disjoints.

10.4. Topologie induite

Soient E un espace topologique et A une partie de E. Pour chaque $x \in A$, posons

$\mathscr{V}^A(x) = \{V \cap A \mid V \in \mathscr{V}(x)\}$, où $\mathscr{V}(x)$ désigne l'ensemble des voisinages de x dans E. L'ensemble des $\mathscr{V}(x)$, $x \in A$, vérifient les conditions (V_1), (V_2), (V_3) et (V_4) et définissent donc sur A une topologie que l'on appelle la *topologie induite par la topologie de E.*

Propriétés : **Vérifier que** pour la topologie induite sur A par celle de E on a :

1) U est une partie ouverte de A si et seulement si il existe une partie ouverte O de E telle que $U = O \cap A$.

2) F est une partie fermée de A si et seulement si il existe une partie G fermée de E telle que $F = G \cap A$.

3) si A est une partie ouverte (resp. fermée) de E, alors toute partie ouverte (resp. fermée) de A est une partie ouverte (resp. fermée) de E.

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}$ et $A = [a, b]$ un intervalle de E. Si $c \in]a, b[$, alors $[a, c[$ est une partie ouverte de A pour la topologie induite. On remarque qu'une partie ouverte pour la topologie induite n'est pas une partie ouverte pour la topologie ambiante.

EXERCICE. **Donner** un exemple du même type pour les parties fermées.

Important. La notion de partie ouverte et de partie fermée n'est pas une notion absolue mais une notion relative ; pour une partie donnée, le fait qu'elle soit ouverte ou fermée dépend de l'espace topologique dans lequel elle est considérée : $[a, c[$ n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}$ mais c'est une partie ouverte de $[a, b]$.

10.5. Suites dans un espace topologique

Dans un espace topologique E, une *suite* est une application de $\mathbb{N}$ dans E notée habituellement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DÉFINITION 10.5.1. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers $x \in E$ si, pour tout voisinage V de x, il existe un entier N_V tel que l'on ait $x_n \in V$ pour tout $n > N_V$

Suites et adhérence d'une partie d'un espace topologique.

Si A est une partie d'un espace topologique E, considérons les assertions suivantes

i) $x \in \overline{A}$.

ii) il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge dans E vers x.

Si E est un espace métrique elles sont équivalentes. Si on considère la notion de suite convergente dans un espace topologique quelconque, on peut remarquer que ii)$\Rightarrow$i) reste vraie alors que l'implication i)$\Rightarrow$ii) ne se généralise que si on suppose que tout point possède un système fondamental dénombrable de voisinages.

10.6. Continuité d'une application entre espaces topologiques

DÉFINITION 10.6.1. On dit qu'une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique E' est *continue en un point* $x_0 \in E$, si pour tout voisinage V' de $f(x_0)$ dans E', $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x_0 dans E.

DÉFINITION 10.6.2. Soient E et E' deux espaces topologiques. Une application de E dans E' est dite *continue* si elle est continue en tout point de E.

THÉORÈME 10.6.3. *Soient E et E' deux espaces topologiques et f une application de E dans E'. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) f est continue.
ii) pour toute partie ouverte U' de E', $f^{-1}(U')$ est une partie ouverte de E.
iii) pour toute partie fermée F' de E', $f^{-1}(F')$ est une partie fermée de E.
iv) pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Attention ! L'image (directe) d'une partie ouverte (resp. fermée) par une application continue n'est pas nécessairement une partie ouverte (resp. fermée) dans l'espace d'arrivée.

PROPOSITION 10.6.4. *Soient E, F, G des espaces topologiques, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications continues. Alors l'application $g \circ f : E \to G$ est continue.*

PROPOSITION 10.6.5. *Soit f une application d'un espace topologique E dans un espace topologique E'. Si f est continue, sa restriction à tout sous-espace topologique A de E est continue.*

DÉMONSTRATION. Appelons g la restriction de f à A. Si $a \in A$, d'après la définition de la continuité de f, pour tout voisinage V' de $g(a) = f(a)$, $f^{-1}(V')$ est un voisinage de a dans E, mais $g^{-1}(V') = f^{-1}(V') \cap A$ est alors un voisinage de a dans A. $\square$

DÉFINITION 10.6.6. Une application f une application d'un espace topologique E dans un espace topologique E' est un *homéomorphisme* si elle est bijective et si f ainsi que f^{-1} sont continues.

Si $f : E \to F$ est un homéomorphisme, les parties ouvertes de F sont exactement les images par f des parties ouvertes de E, de même pour les parties fermées de F. Si $y = f(x)$, les voisinages de y sont exactement les images par f des voisinages de x.

Définition 10.6.7. Soient E et E' deux espaces topologiques, A une partie de E, $a \in \overline{A}$ et f une application de A dans E'. On dit que f a une *limite* l en a si pour tout voisinage V' de l dans E', il existe un voisinage V de a dans E tel que

$$f(A \cap B(a, \eta)) \subset B(l, \varepsilon).$$

Remarque. **Vérifier que** si E' est séparé, une fonction admet au plus une limite en a.

10.7. Topologie produit

Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques. On va définir à l'aide des systèmes fondamentaux de voisinages une topologie sur le produit cartésien $E_1 \times E_2$.

Si $x = (x_1, x_2)$, on pose $\mathfrak{S}_x = \{V_1 \times V_2 \mid V_i \in \mathscr{V}_i(x_i),\ i = 1, 2\}$ où $\mathscr{V}_i(x_i)$ est l'ensemble des voisinages de x_i dans E_i. On définit ainsi une topologie sur $E_1 \times E_2$ appelée *topologie produit*. En effet, si on note $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des parties V de $E_1 \times E_2$ telles qu'il existe $W = V_1 \times V_2 \in \mathfrak{S}_x$ vérifiant $W \subset V$, alors les $\mathscr{V}(x)$, $x \in E_1 \times E_2$, vérifient les propriétés des voisinages :

(V_1), (V_2) : c'est immédiat ;

(V_3) : il suffit de vérifier que $(V_1 \times V_2) \cap (V_1' \times V_2')$ contient une partie de la forme de la forme $U_1 \times U_2 \in \mathscr{V}(x_1) \times \mathscr{V}(x_2)$ (**pourquoi ?**) : $U_1 = V_1 \cap V_1'$ et $U_2 = V_2 \cap V_2'$ conviennent.

(V_4) Soit $V \in \mathscr{V}(x)$; il existe $V_i \in \mathscr{V}(x_i)$, $i = 1, 2$, tels que $V \supset V_1 \times V_2$. D'après (V_4) pour E_i, il existe $W_i \in \mathscr{V}(x_i)$ vérifiant d'une part $W_i \subset V_i$ et d'autre part $y_i \in W_i \Rightarrow V_i \in \mathscr{V}(y_i)$. Si on pose $W = W_1 \times W_2$, on a $W \in \mathscr{V}(x)$ et $z \in W \Rightarrow V \in \mathscr{V}(z)$ (**pourquoi ?**).

Exemple. Si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont deux espaces métriques, la topologie produit sur $E_1 \times E_2$ coïncide avec la topologie définie par la métrique produit.

Proposition 10.7.1. *Soient E_1, E_2 deux espaces topologiques. Si on munit l'ensemble $E_1 \times E_2$ de la topologie produit, les projections $p_i : E_1 \times E_2 \to E_i$, $i = 1, 2$, sont continues.*

Démonstration. Soit $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Pour tout voisinage V_1 de $x_1$dans E_1, on a $p_1^{-1}(V_1) = V_1 \times E_2$ qui est donc un voisinage de x dans $E_1 \times E_2$, d'où la continuité de p_1. On prouve de même la continuité de p_2. □

Théorème 10.7.2. *Soient E, F_1, F_2 des espaces topologiques et f une application de E dans $F_1 \times F_2$. On note p_1 et p_2 les projections de $F_1 \times F_2$ dans F_1 et F_2 respectivement. Pour que f soit continue en un point $a \in E$, , il faut et il suffit que $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ soient continues en a.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet d'après la proposition précédente $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont des composées d'applications continues, elles sont donc continues.

La condition est suffisante. Posons $f_i = p_i \circ f$, $i = 1, 2$. Pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage V_1 de $f_1(a)$ et un voisinage V_2 de $f_2(a)$ tels que $V \supset V_1 \times V_2$ et alors $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(V_1 \times V_2) = f_1^{-1}(V_1) \times f_2^{-1}(V_2)$ est un voisinage de a (**pourquoi ?**). □

Exemple. Soient u_1 et u_2 deux applications continues de E dans F_1 et F_2 respectivement et soit g une application continue de $F_1 \times F_2$ dans un espace topologique G. Montrer que l'application $x \mapsto g(u_1(x), u_2(x))$ est continue.

Proposition 10.7.3. *Soient E_1, E_2, F des espaces topologiques et f une application continue de $E_1 \times E_2$ dans F. Alors pour tout $a \in E_1$, l'application $y \mapsto f(a, y)$ est continue et pour tout $b \in E_2$, l'application $x \mapsto f(x, b)$ est continue.*

Démonstration. Si f est continue, la proposition 10.6.5 implique que sa restriction à $\{a\} \times E_2$ ainsi que sa restriction à $E_1 \times \{b\}$ sont continues. Comme les applications $y \mapsto (a, y)$ et

$x \mapsto (x, b)$ sont continues (**pourquoi ?**), les applications $y \mapsto f(a, y)$ et $x \mapsto f(x, b)$ sont continues. $\square$

Attention ! La réciproque est fausse : soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vérifier que les applications partielles $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont continues mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

PROPOSITION 10.7.4. *Si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques séparés, leur produit E est aussi séparé.*

DÉMONSTRATION. Soient $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ deux points distincts de E ; alors on a soit $a_1 \neq b_1$, soit $a_2 \neq b_2$. Si on a par exemple $a_1 \neq b_1$, il existe $V_1 \in \mathscr{V}(a_1)$ et $W_1 \in \mathscr{V}(b_1)$ tel que $V_1 \cap W_1 = \emptyset$. Alors $V_1 \times E_2$ et $W_1 \times E_2$ sont des voisinages respectifs de a et de b qui sont disjoints. $\square$

PROPOSITION 10.7.5. *Un espace topologique E est séparé si et seulement si la diagonale Δ de $E \times E$ est une partie fermée de $E \times E$.*

DÉMONSTRATION. La condition est nécessaire. Soit $(a, b) \notin \Delta$; alors $a \neq b$ et comme E est séparé, il existe $V_a \in \mathscr{V}(a)$ et $V_b \in \mathscr{V}(b)$ tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$. Le produit $V_a \times V_b$ est voisinage de (a, b) dans $E \times E$ qui ne rencontre pas Δ (**pourquoi ?**) ; donc $E \times E \setminus \Delta$ est un voisinage de (a, b). Par conséquent Δ est fermée dans $E \times E$ (**pourquoi ?**). La condition est suffisante. Si Δ est fermée dans $E \times E$, alors $E \times E \setminus \Delta$ est ouvert dans $E \times E$. Si $a \neq b$, alors $(a, b) \notin \Delta$ et

$E \times E \setminus \Delta$ est un voisinage $(a,\ b)$. Par définition de la topologie produit, il existe $V_a \in \mathscr{V}(a)$ et $V_b \in \mathscr{V}(b)$ tels que $(V_a \times V_b) \cap \Delta = \emptyset$, i.e $V_a \cap V_b = \emptyset$. $\square$

CHAPITRE 11

Espaces compacts

11.1. Définition de la compacité.

DÉFINITION 11.1.1. Soit E un espace topologique et $A \subset E$. On appelle *recouvrement ouvert* de A une famille $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes de E telles que $\bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i \supset A$.

On dit que le recouvrement est *fini* si l'ensemble I des indices est fini.

On appelle *recouvrement extrait* du recouvrement $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ de A un recouvrement $(\mathscr{O}_i)_{i\in J}$ de A avec $J \subset I$.

DÉFINITION 11.1.2. On dit qu'un espace topologique E est *compact* si E est séparé et si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini. Cette propriété concernant les recouvrements ouvert s'appelle *la propriété de Borel-Lebesgue*.

PROPOSITION 11.1.3. *Soit E un espace topologique séparé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) E est compact.

ii) Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de parties fermés de E telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, il existe $J \subset I$ fini *tel que $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$.*

Démonstration. i)$\Longrightarrow$ ii). Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de parties fermés de E telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$; si on note $\mathcal{O}_i = \complement_E F_i$, $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de E et on a

$$E = \complement_E \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i;$$

puisque E est compact, il existe $J \subset I$ *fini* tel que $\bigcup_{i\in J} \mathcal{O}_i = E$. En prenant le complémentaire, on obtient

$$\emptyset = \complement_E \left(\bigcup_{i\in J} \mathcal{O}_i\right) = \bigcap_{i\in J} \complement_E \mathcal{O}_i = \bigcap_{i\in J} F_i.$$

ii)$\Longrightarrow$ i) La démonstration est analogue. □

Corollaire 11.1.4. *Soit E un espace compact et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties fermées* non vides *emboîtées (c'est-à-dire $F_n \supset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Démonstration. Supposons le contraire ; il existerait alors $A \subset \mathbb{N}$ fini tel que $\bigcap_{n\in A} F_n = \emptyset$. A cause de la condition d'emboîtement, on aurait $\bigcap_{n\in A} F_n = F_{\sup(A)} = \emptyset$ (**s'en convaincre !**), ce qui contredit l'une des hypothèses. □

Proposition 11.1.5. *Si E et F sont deux espaces compacts, alors $E \times F$ est aussi un espace compact.*

Démonstration. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $E \times F$. Par définition de la topologie produit, pour chaque $i \in I$ on peut trouver des ouverts $(E_{i_j})_{j\in J}$ de E et $(F_{i_j})_{j\in J}$ de F

tels que $\cup_{j\in J} E_{i_j} \times F_{i_j} = O_i$. De plus les $(E_{i_j})_{(i,j)\in I\times J}$ forment un recouvrement de E et les $(F_{i_j})_{(i,j)\in I\times J}$ un recouvrement de F. Les espaces E et F étant tous deux compacts, on peut extraire de chacun d'eux un sous recouvrement fini. Soient $(E_k)_{k\in K}$ et $(F_l)_{l\in L}$ ces recouvrements, $(E_k \times F_l)_{(k,l)\in K\times L}$ forme alors un recouvrement ouvert fini de $E \times F$. En associant a chacun des ouverts de ce recouvrement un des ouverts O_i qui le contient, on obtient un sous recouvrement fini du recouvrement initial. □

Remarque. Si E et F sont non vides alors

$$E \times F \text{ compact} \Longrightarrow E \text{ et} F \text{ compacts.}$$

11.2. Parties compactes.

DÉFINITION 11.2.1. Si E est un espace topologique, on dira que $A \subset E$ est compacte si A, muni de la topologie induite, est compacte.

PROPOSITION 11.2.2. *Soit E un espace topologique. Toute partie compacte A de E est fermée.*

DÉMONSTRATION. Soit $\xi \in \overline{A}$; pour tout voisinage V de ξ, $\overline{V} \cap A$ est une partie fermée non vide de A et puisque A est séparé $\emptyset \neq \bigcap_{V\in\mathcal{V}(\xi)} \cap A = \{\xi\} \cap A$; il en résulte que $\xi \in A$. □

Remarque. Contrairement au cas des espaces métriques, on ne peut rien dire de plus

PROPOSITION 11.2.3. *Soit E un espace topologique compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) F est une partie fermée de E.

ii) F est une partie compacte de E.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que i) $\Longrightarrow$ ii) (**pourquoi ?**). Soit donc F une partie fermée de E et $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement de F par des parties ouvertes de E. Alors avec $\mathscr{O}_\omega = \complement_E F$, où $\omega \notin I$, $(\mathscr{O}_j)_{j\in I\cup\{\omega\}}$ est un recouvrement ouvert de E dont on peut extraire un recouvrement fini de la forme $(\mathscr{O}_j)_{j\in J\cup\{\omega\}}$, où J est une partie finie de I. Il en résulte que $F \subset \bigcup_{j\in J} \mathscr{O}_j$. □

Exemple. Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$.

11.3. Compacité et continuité.

THÉORÈME 11.3.1. *Soient E et F des espaces topologiques séparés. Si E est compact et si $f : E \to F$ est une application continue, alors $f(E)$ est une partie compacte de F.*

DÉMONSTRATION. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $f(E)$ par des ouverts de F ; alors $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E. Puisque E est compact, il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j) = E$ et par conséquent $f(E) \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. □

Application. Si E est compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue, alors $f(E)$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$. Autrement f est bornée et atteint $\sup_{x\in E} f(x)$ et $\inf_{x\in E} f(x)$.

COROLLAIRE 11.3.2. *Soit $f : E \to F$ une application continue* bijective. *Si E est compact, alors f est un homéomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Notons f^{-1} l'application réciproque de f. Si G est une partie fermée, donc compacte de E, alors $(f^{-1})^{-1}(G) = f(G)$ est une partie compacte, donc fermée de F. Ceci démontre la continuité de f^{-1}. □

Proposition 11.3.3. *Soit E un espace compact et $f : E \to F$ une application de E dans un espace topologique séparé F. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) f est continue.

ii) Le graphe G_f de f est une partie compacte de $E \times F$.

Démonstration. i) $\Longrightarrow$ ii) Si f est continue, il en est de même de $F : x \mapsto (x, f(x))$. Alors $G_f = F(E)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.

ii) $\Longrightarrow$ i). Soit $\pi : G_f \to E$ l'application définie par $\pi(x, f(x)) = x$. C'est une application continue bijective ; puisque G_f est compact, π est un homéomorphisme. Soit π_2 la projection de $E \times F$ sur F. La relation $f = \pi_2 \circ \pi^{-1}$ montre alors que f est continue. $\square$

CHAPITRE 12

Espaces connexes

Le but de ce chapitre est de donner un sens, pour un espace topologique, à la notion “en un seul morceau”.

12.1. Définition et propriétés.

DÉFINITION 12.1.1. On dit qu'un espace topologique E est *connexe* si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.

PROPOSITION 12.1.2. *Soit E un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) E est connexe.
ii) Si E est union de deux parties ouvertes disjointes, l'une des deux est vide.
iii) Si E est union de deux parties fermées disjointes, l'une des deux est vide.
iv) Toute application continue de E dans l'espace discret $\{0, 1\}$ est constante.

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii). Supposons que $E = U_1 \cup U_2$, où U_1 et U_2 sont deux ouverts disjoints de E. Comme $\complement_E U_2 = U_1$, alors U_1 est ouvert et fermé dans E d'où il résulte que soit $U_1 = \emptyset$ soit $U_1 = E$ auquel cas $U_2 = \emptyset$.

ii) $\Longrightarrow$ iii). Si E est union deux fermés disjoints F_1 et F_2, alors F_1 et F_2 sont aussi des parties ouvertes de E.

iii) $\Longrightarrow$ iv). Soit $f : E \to \{0, 1\}$ une application continue. Alors $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont deux parties fermées disjointes de E dont l'union est égale à E ; l'une d'elles est donc vide. Si $f^{-1}(0) = \emptyset$, alors $f = 1$, sinon on a $f = 0$.

iv) $\Longrightarrow$ i). Soit A une partie ouverte et fermée de E. La fonction caractéristique de A, $\chi_A : E \to \{0, 1\}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue (**pourquoi ?**). Elle est donc constante ce qui implique $A = \emptyset$ ou $A = E$. □

PROPOSITION 12.1.3. *Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques non vides. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) E_1 et E_2 sont connexes.

ii) $E_1 \times E_2$ est connexes.

DÉMONSTRATION. i) $\Longrightarrow$ ii). Soit A une partie ouverte et fermée non vide de $E_1 \times E_2$. Donnons-nous un point $(x_0, y_0) \in A$.

L'application $\iota : E_1 \to E_1 \times E_2$ définie par $\iota(x) = (x, y_0)$ est continue ; donc $\iota^{-1}(A) = \{x \in E_1 \mid (x, y_0) \in A\}$ est une partie ouverte et fermée non vide de E_1 d'où $\iota^{-1}(A) = E_1$, autrement dit $E_1 \times \{y_0\} \subset A$. Si on se fixe maintenant un point $x \in E_1$, on démontre de la même façon que $\{x\} \times E_2 \subset A$. Finalement on a bien $A = E_1 \times E_2$.

ii) $\Longrightarrow$ i). Si E_1 n'est pas connexe, il existe Ω_1 ouvert et fermé non vide dans E_1 différent de E_1. Alors $\Omega_1 \times E_2 = p_1^{-1}(\Omega_1)$ est une partie ouverte et fermée non vide de $E_1 \times E_2$ différente de $E_1 \times E_2$ (**s'en convaincre**). □

12.2. Parties connexes

Définition 12.2.1. Dans un espace topologique E, on dit qu'une partie A est connexe si A, muni de la topologie induite, est connexe.

Proposition 12.2.2. *Soit E un espace topologique, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de E telles que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est une partie connexe de E.*

Démonstration. Soit $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \{0, 1\}$ une application continue. Alors $f_{|A_i}$ est constante et puisque $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, f est constante. □

Proposition 12.2.3. *Soit E un espace topologique et $A_1, \ldots, A_n$ des parties connexes de E telles que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout i. Alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est une partie connexe de E.*

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons qu'il soit vrai pour un entier $n \geqslant 1$; $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est connexe et de plus $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} \supset A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, donc $A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}$ est connexe. □

Proposition 12.2.4. *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie connexe de E. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Démonstration. Soient U_1 et U_2 deux ouverts disjoints tels que $B \subset U_1 \cup U_2$. On sait que soit $U_1 \cap A = \emptyset$ soit $U_2 \cap A = \emptyset$. Supposons par exemple que $U_1 \subset E \setminus A$; comme U_1 est un ouvert de E, on a $U_1 \subset \mathrm{Ext}A$ et donc $U_1 \cap B = \emptyset$. □

Application. Connexité du double peigne.

12.3. Espaces connexes et applications continues. Espaces connexes par arcs

THÉORÈME 12.3.1. *Soit (E, d) un espace métrique connexe et $f : E \to F$ une application continue. Alors $f(E)$ est une partie connexe de F.*

DÉMONSTRATION. Soient U_1 et U_2 deux parties ouvertes disjointes non vides de $f(E)$; alors $f^{-1}(U_1)$ et $f^{-1}(U_2)$ sont deux ouverts disjoints de E qui recouvrent E et par conséquent l'un des deux est vide. Ceci signifie que soit $U_1 = \emptyset$, soit $U_2 = \emptyset$. $\square$

DÉFINITION 12.3.2. On dit qu'une partie A d'un espace métrique (E, d) est connexe par arcs si, pour tout $x, y \in A$ il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to A$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ (on dit que γ est un arc dans A joignant x à y).

PROPOSITION 12.3.3. *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit E un espace connexe par arcs. Si E est vide c'est vrai. Sinon soit $x \in E$ et pour tout $y \in E$, désignons par $\gamma_{x,y}$ un arc joignant x à y. On a alors

$$E = \bigcup_{y \in E} \gamma_{x,y}([0, 1]).$$

Puisque les $\gamma_{x,y}([0, 1])$ sont connexes et que tous contiennent le point x, on en déduit que E est connexe. $\square$

Remarque. En général la réciproque est fausse.

12.4. Composantes connexes

Si E est un espace topologique “en plusieurs morceaux”, on se propose de définir les “morceaux”.

Définition 12.4.1. Soit E un espace topologique. On dit qu'une partie A est une *composante connexe* de E si c'est une partie connexe maximale de E, autrement dit A est une partie connexe de E qui n'est contenue strictement dans aucune partie connexe de E.

Exemples. Si E est connexe, E est son unique composante connexe.
Si E est un espace discret, ses composantes connexes sont les ensembles $\{x\}$, $x \in E$.
Remarque. Toute composante connexe de E est une partie fermée de E.

Lemme 12.4.2. *Deux composantes connexes distinctes d'un espace topologique E sont disjointes.*

Démonstration. Soient A_1 et A_2 deux composantes connexes de E. Si on a $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, alors $A_1 \cup A_2$ est une partie connexe de E et par définition on a donc

$$A_1 = A_1 \cup A_2 = A_2.$$

□

Lemme 12.4.3. *Soit E un espace topologique et $x \in E$. Il existe une unique composante connexe de E contenant x, qui s'appelle la composante connexe de x dans E.*

Démonstration. La réunion de toutes les parties connexes de E contenant x est une partie connexe de E qui est maximale (**pourquoi ?**). □

Proposition 12.4.4. *Tout espace topologique E est la réunion disjointe de ses composantes connexes.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 12.4.3, E est la réunion de ses composantes connexes et d'après le lemme 12.4.2 deux composantes connexes distinctes sont disjointes. $\square$

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble muni d'une *relation d'ordre*, c'est-à-dire d'une relation telle que

i) pour tout $x \in E$ on a $x \leqslant x$

ii) Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors $x = y$

iii) Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$

On dit que $(E, \leqslant)$ est *totalement ordonné* si pour tout $x, y \in E$, soit $x \leqslant y$, soit $y \leqslant x$.

On dit que M est un *majorant* de $A \subset E$ si pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$ et si A admet un majorant, on dit que A est *majorée*.

On dit que m est un *minorant* de $A \subset E$ si pour tout $x \in A$, $m \leqslant x$ et si A admet un minorant, on dit que A est *minorée*.

Si $A \subset E$ est une partie majorée (resp. minorée) de E, on appelle borne supérieure (resp. inférieure) de A le plus grand des majorants (resp.le plus petit des minorants) de A.

Exemple. Soit X un ensemble, on considère $E = \mathscr{P}(X)$ muni de la relation d'ordre inclusion,

i) E est-il totalement ordonné ?

ii) Toute partie $A \subset E$ est-elle minorée, majorée ?

iii) Toute partie $A \subset E$ admet-elle une borne supérieure, une borne inférieure ?

Retour au cours

Si A a un plus grand élément noté m, alors m est un majorant de A et tout majorant μ de A vérifie en particulier $m \leqslant \mu$, donc $m = \mathrm{Sup} A$. Réciproquement, si $s = \mathrm{Sup} A$ est un élément de A, s étant un majorant de A, c'est le plus grand élément de A.

Retour au cours

Remarquer que :
i) traduit que s est un majorant de A
ii) traduit que tout nombre strictement inférieur à s n'est pas un majorant
et conclure

Retour au cours

Caractérisation de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$; alors l est la borne inférieure de A si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, les conditions suivantes sont satisfaites :

i) $l - \varepsilon$ est un minorant de A.

ii) $l + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A, c.à.d qu'il existe $a \in A$ tel que $l + \varepsilon > a$.

Retour au cours

Si $x \in A$, on a $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$ et par conséquent pour $x, y \in A$ on obtient $|x - y| \leqslant \sup A - \inf A$.

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $x_\varepsilon > \sup A - \varepsilon/2$ et $y_\varepsilon > \inf A + \varepsilon/2$. Alors

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| > \sup A - \inf A - \varepsilon$$

Retour au cours

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$. On considérera successivement les cas où A n'est ni majoré, ni minoré, A est majoré mais pas minoré, A est minoré mais pas majoré, A est majoré et minoré.

Retour au cours

Caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$; alors s est la borne supérieure de A si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, les conditions suivantes sont satisfaites :

i) $s + \varepsilon$ est un majorant de A.

ii) $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, c.à.d qu'il existe $a \in A$ tel que $s - \varepsilon < a$.

Caractérisation de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$; alors l est la borne inférieure de A si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, les conditions suivantes sont satisfaites :

i) $l - \varepsilon$ est un minorant de A.

ii) $l + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A, c.à.d qu'il existe $a \in A$ tel que $l + \varepsilon > a$.

Retour au cours

-Remarquer que la suite (u_n) est bornée.
-Montrer, en utilisant la remarque pour $A_n = \{u_p \mid p \geqslant n\}$, que $l = \underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$.

Retour au cours

i)$\Longrightarrow$ii). Posons $l = \underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$l - \varepsilon < i_N \leqslant s_N < l + \varepsilon.$$

donc $A_N \subset]l - \varepsilon,\ l + \varepsilon[$; autrement dit, pour tout $n \geqslant N$ $|l - u_n| < \varepsilon$.

ii)$\Longrightarrow$i). Si (u_n) est convergente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $A_N \subset]l - \varepsilon,\ l + \varepsilon[$, donc

$$l - \varepsilon \leqslant \underline{\lim}\, u_n \leqslant \overline{\lim}\, u_n \leqslant l + \varepsilon.$$

Il en résulte que $l = \underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$.

Retour au cours

i) on montre $d(x,\ z) \geqslant d(x,\ y) - d(y,\ z)$ et $d(x,\ z) \geqslant d(y,\ z) - d(x,\ y)$
ii) se montre par récurrence.

Retour au cours

Remarquer que la boule considérée ne contient que le point x.

Retour au cours

Pour prouver V_4), on remarque que si $V \in \mathscr{V}(a)$ alors V contient une boule $B(a,r)$ centrée en a. On peut alors prendre $W = B(a,r)$.

Retour au cours

Tout cela se déduit facilement de la définition d'une partie ouverte et des propriétés des voisinages. (On notera que l'ensemble vide n'ayant pas d'éléments est bien un voisinage de chacun de ses points).

Retour au cours

Remarquer que

$$\complement_E(\cup A_i) = \cap(\complement_E A_i) \quad \text{et} \quad \complement_E(\cap A_i) = \cup(\complement_E A_i)$$

Retour au cours

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} B(x, \epsilon_x)$$

Retour au cours

Si $x \notin \overline{A}$, on peut trouver une boule centrée en x qui ne rencontre pas A.

Retour au cours

$\complement_E F$ est contenu dans $\complement_E A$ et $\overbrace{\complement_E A}^{\circ}$ est le plus grand ouvert de $\complement_E A$.

Retour au cours

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, notons N_ε le premier entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$. Si $n > N_\varepsilon$, on a $d(x, x_{\varphi(n)}) < \varepsilon$.

Retour au cours

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier P tel que pour tout $p > P$ on ait $d(x, x_{\varphi(p)}) < \varepsilon$. Fixons un entier N, si $n = \varphi(p)$ avec $p > \max(P, N)$ alors $n > N$ et $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Retour au cours

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, notons N_ε le premier entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$. Si $n > N_\varepsilon$, on a $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Retour au cours

Utiliser la proposition précédente et le fait que A est une partie fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.

Retour au cours

Utiliser la définition de la continuité en un point.

Retour au cours

Utiliser la définition d’un point adhérent.

Retour au cours

Utiliser la Théorème 2.3.6.

Retour au cours

Utiliser la définition des distances topologiquement équivalentes et de la continuité en un point.

Retour au cours

Utiliser la définition de la continuité en un point et des suites convergentes.

Retour au cours

Comparer avec la définition d'une suite convergente.

Retour au cours

Utiliser la proposition précédente et la définition de la continuité

Retour au cours

Utiliser la définition de la continuité en un point.

Retour au cours

D'après la proposition précédente $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont des composées d'applications continues.

Retour au cours

C'est une conséquence immédiate de la définition de la distance produit $\delta = \max(d_1, d_2)$.

Retour au cours

Cela résulte de la proposition et du théorème précédents.

Retour au cours

Dans un espace métrique un point est une partie fermée.

Retour au cours

Les applications $p_1 \circ h = f$ et $g = p_2 \circ h = g$ sont des applications continues.

Retour au cours

Cette suite ne possède pas de valeur d’adhérence.

Retour au cours

C’est la proposition précédente.

Retour au cours

C’est l’image par une application continue d’une suite convergente.

Retour au cours

C'est une conséquence du fait que les $\left(B(x_k,\ \eta_{x_k}/2)\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ forment un recouvrement de E, du choix de η et de l'inégalité triangulaire.

Retour au cours

a) Indication avec des suites : il ne peut pas exister de suite $((x_n,\ y_n))_n$ de points de $E \times E$ telle que

$$d(x_n,\ y_n) < \frac{1}{2^n} \text{ et } d'(f(x_n),\ f(y_n)) \geqslant \varepsilon_0$$

pour un certain ε_0.

Retour au cours

On remarque que les parties ouvertes de $\{0,1\}$ sont $\{0,1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\emptyset$ et on utilise la définition de la continuité.

Retour au cours

Les ouverts U_1 et U_2 étant complémentaires l'un de l'autre ils sont également fermés dans le compact E, donc compacts. L'application d de $U_1 \times U_2$ dans $\mathbb{R}$ est définie et continue sur un compact, elle atteint donc sa borne inférieure qui n'est autre que la distance de U_1 à U_2.

Retour au cours

U_i est une partie ouverte de A.

Retour au cours

C’est une reunion de parties connexes d’intersection non vide.

Retour au cours

Elle est connexe par arc.

Retour au cours

Il suffit de considérer la suite de rationnels définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1/2(2 - u_n^2)$. Elle converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$. Elle est donc de Cauchy et sa limite n'est pas rationnelle.

Retour au cours

Puisque $F_{n+1} \subset F_n$, on a $\{x_p | \, p \geqslant q\} \subset F_q$, de plus $\operatorname{diam} F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Retour au cours

Les F_n sont des fermés de E.

Retour au cours

C’est une conséquence immédiate de la définition des F_n et des suites de Cauchy.

Retour au cours

Si δ désigne la distance produit, on a $\delta((x, y_0), (x', y_0)) = d_1(x, x')$.

Retour au cours

La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers zéro.

Retour au cours

Par définition des fermés d'une partie et parce que A est fermée dans E.

Retour au cours

Par définition de x_n, $f(x_n) \in F_n$. De plus $\bigcap_n F_n = \overline{f}(x)$ et $\operatorname{diam} F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Retour au cours

Quitte à extraire, on peut supposer que $d(x, x_n) < 1/2^n$ et $d(y, y_n) < 1/2^n$, alors $\overline{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ et $\overline{f}(y) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$.

Retour au cours

Cela résulte de la continuité de la distance et de la continuité des fonctions f et f_n.

Retour au cours

C'est une conséquence de la décroissance de la suite des distances $d(f(x), f_n(x))$.

Retour au cours

Parce que la suite des distances $d(f(x), f_n(x))$ converge vers zéro.

Retour au cours

A est une partie fermée d'un espace métrique complet.

Retour au cours

Les fonctions u_y et f sont continues.

Retour au cours

Les fonctions u_y et f sont continues.

Retour au cours

Par récurrence : p_0 est un polynôme ; les polynômes formant une algèbre, si p_n est un polynôme, $p_n(t) + 1/2\left(t - p_n(t)^2\right)$ est aussi un polynôme.

Retour au cours

La fonction $p(x) = x + 1/2(t - x^2)$ est continue.

Retour au cours

La fonction φ est un homéomorphisme local, i.e. au voisinage de chaque point x_0 de $\mathbb{R}$, φ possède une application réciproque continue. La fonction g s'exprime alors localement comme la composée de deux fonctions continues.

Retour au cours

L'application $(\mathbb{R}^n, d_\infty) \ni (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \in (E, N_0)$ étant une isométrie, c'est un homéomorphime qui conserve la distance. Il conserve donc les compacts, les fermés et les parties bornées.

Retour au cours

Prenons $\epsilon = 1$, il existe p_0 tel que $\| f \| \leqslant \| f_{p_0} \| + 1$.

Retour au cours

En raison de la linéarité de L, on a $L(x+h) - L(x) = L(h)$. La continuité de L en x implique donc la continuité en 0 et on peut appliquer la proposition.

Retour au cours

Il existe x dans E tel que $L(x) \neq 0$. Il suffit de poser $a = \frac{x}{L(x)}$.

Retour au cours

Soit $x \in \widetilde{B}(0,r)$, si $L(x) > 1$ alors $\frac{x}{L(x)}$ est encore contenu dans $\widetilde{B}(0,r)$. Mais $L(\frac{x}{L(x)} = 1$, d'où la contradiction.

Retour au cours

Si $y \in F \oplus F^{\perp}$, alors $\langle y, y \rangle = \|y\|^2 = 0$ et donc $y = 0$.

Retour au cours

Posons $\widetilde{I}_n = \{i \in I |\ \langle e_i, x\rangle > \frac{1}{n}\}$, alors $I = \cup_{n\in bbN}\widetilde{I}_n$. De plus si J_n est une partie finie de $\widetilde{I}_n$, on a c$ard J_n \leqslant n\|x\|^2$, d'après le corollaire précédent ; $\widetilde{I}_n$ est donc une partie finie de I.

Retour au cours

Si $x \in A$, on a $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$ et par conséquent pour $x, y \in A$ on obtient $|x - y| \leqslant \sup A - \inf A$.

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $x_\varepsilon > \sup A - \varepsilon/2$ et $y_\varepsilon > \inf A + \varepsilon/2$. Alors

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| > \sup A - \inf A - \varepsilon$$

Retour au cours

Si $x \in]a,b[$ considérer $\min(|x-a|,|x-b|) > 0$

Retour au cours

Si x appartient à une union d'ensembles, il appartient à l'un d'entre eux.

Retour au cours

Un minimum de nombres strictement positifs est strictement positif.

Retour au cours

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n,1/n[=\{0\}$

Retour au cours

Remarquer que

$$\complement_{\mathbb{R}}(\cup A_i) = \cap(\complement_{\mathbb{R}} A_i) \quad \text{et} \quad \complement_{\mathbb{R}}(\cap A_i) = \cup(\complement_{\mathbb{R}} A_i)$$

et montrer que

1) Une intersection de parties fermées de $\mathbb{R}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$

2) Une réunion finie de parties fermées de $\mathbb{R}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$

Retour au cours

Un point $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si il existe $r_x > 0$ tel que $]x - r_x, x + r_x[\subset A$.
Un point $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\cap A \neq \emptyset$.

Retour au cours

Si $A = \{0\} \cup]1,2]$, $\text{Fr}A = \{0,1,2\}$, $\overset{\circ}{A} =]1,2[$ et $\overline{A} = \{0\} \cup [1,2]$

Retour au cours

Si $x \in \overline{A}$, pour tout entier $n > 0$ on a $]x - 1/n, x + 1/n[\cap A \neq \emptyset$. Par l'axiome du choix, on obtient la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en choisissant x_n dans $]x - 1/n, x + 1/n[\cap A$.

Retour au cours

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Retour au cours

Par définition φ est strictement croissante. De plus on a $a_k \leqslant x_{\varphi(k)} \leqslant b_k$ et les deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Retour au cours

Si on appelle $x_1, \dots, x_n$ les centres des n intervalles recouvrant K, on a

$$\operatorname{diam} K \leqslant \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i - x_j| + 2$$

.

Retour au cours

Il est minoré car K est borné.

Retour au cours

Comme K est fermé, $t \in K$.

Retour au cours

Il suffit d'associer les deux théorèmes précédents.

Retour au cours

La partie $I \cap U_1$ fermée dans I, c'est le complémentaire de la partie ouverte $I \cap U_2$.

Retour au cours

La partie $I \cap U_2$ fermée dans I, c'est le complémentaire de la partie ouverte $I \cap U_1$. L'inégalité résulte immédiatement de la définition de c et d.

Retour au cours

Si $c < d$, le point $\frac{c+d}{2}$ n'appartient pas à I, ce qui contredit la définition d'un intervalle.

Retour au cours

$f(I)$ est contenu dans l'intervalle $[m, M]$. S'il contient $]m, M[$,ce ne peut être que l'un des intervalles $[m, M]$, $[m, M[$, $]m, M]$ ou $]m, M[$.

Retour au cours

Notons $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des parties V de E qui contiennent un élément $O \in \mathscr{O}$ contenant x. On a immédiatement

V_1) x appartient à tout élément de $\mathscr{V}(x)$

V_2) Toute partie W de E qui contient un élément de $\mathscr{V}(x)$ est aussi un élément de $\mathscr{V}(x)$

La propriété V_3 résulte directement de La propriété O_2.

Retour au cours

Cela résulte de la définition et des propriétés d’un système fondamental de voisinages.

Retour au cours

Si $z = (z_1, z_2) \in W$, alors $z_i \in W_i$ et $V_i \in \mathscr{V}(z_i)$, $i = 1, 2$. Par conséquent $V_1 \times V_2$ est un voisinage de z. Comme $V \supset V_1 \times V_2$, c'est aussi un voisinage de z.

Retour au cours

C'est la continuité des f_i, $i = 1, 2$.

Retour au cours

Chacune de leur composante est continue.

Retour au cours

Cela résulte de la définition de la topologie produit.

Retour au cours

Son complémentaire est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert.

Retour au cours

C’est la proposition précédente.

Retour au cours

On remarque que les parties ouvertes de $\{0,1\}$ sont $\{0,1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\emptyset$ et on utilise la définition de la continuité.

Retour au cours

C’est une reunion de parties connexes d’intersection non vide.

Retour au cours