Chapitre 2

Espaces vectoriels normés

2.1. 1 Définition et exemples

Rappel On appelle un $\mathbb{R}$-espace vectoriel tout ensemble E muni d'une loi interne

$$+ : \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (u,v) \longmapsto u+v \end{array}$$

et d'une loi de composition externe

$$\cdot : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times E \to E \\ (\alpha, v) \longmapsto \alpha \cdot v \end{array}$$

i.e.

1) $(E,+)$ est un groupe commutatif (abélien)

2) $\forall u \in E \quad 1 \cdot u = u$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in E \quad \lambda(u+v) = (\lambda u) + (\lambda v)$

4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall u \in E \quad (\lambda+\mu) u = (\lambda u) + (\mu u)$

5) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall u \in E \quad (\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

non rappelé en cours

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel une norme sur E est une application

$$\| \, \| : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \\ x \longmapsto \|x\| \end{array}$$

vérifiant les 3 conditions suivantes

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E \qquad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(ii) $\forall x, y \in E \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(iii) $\qquad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

NB

$$\|0\| = |0|\,\|0\| = 0$$

Donc, en fait $\|X\| = 0 \iff X = 0$.

Exemple 1

~~$\|+\| \rightarrow$~~

L'application $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exemple 2

$E = \mathbb{R}^n$. ~~On introduit classiquement 3 normes sur $\mathbb{R}^n$~~ On a les normes suivantes. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$.

~~$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$~~

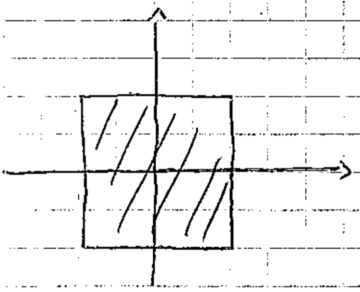
$$\|X\|_\infty = \overset{\max}{\sup}\{|x_i|,\ 1 \leq i \leq n\}$$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

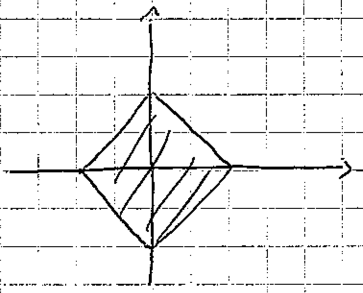
$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

Exercice : vérifier qu'il s'agit effectivement de normes.

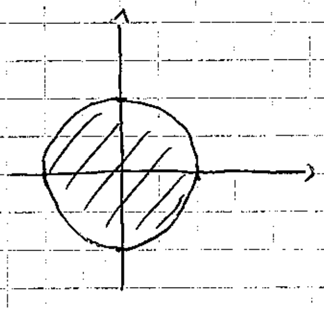
Les boules unité associées dans $\mathbb{R}^2$:



$\|.\|_\infty$



$\|.\|_1$



$\|.\|_2$

~~De façon~~

Les normes $\|.\|_1$ $\|.\|_2$ ~~est~~ sont ~~un~~ des cas particuliers de la norme $\|.\|_p$ définie pour $p \geq 1$ par

$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Pour vérifier que $\| \|_p$ est une norme il faut vérifier que $\|.\|_p$ satisfait l'inégalité du triangle. La preuve est basée sur l'inégalité de Hölder :

Théorème (Inégalité de Hölder)

Soit $p > 1$ et $q > 1$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q.$$

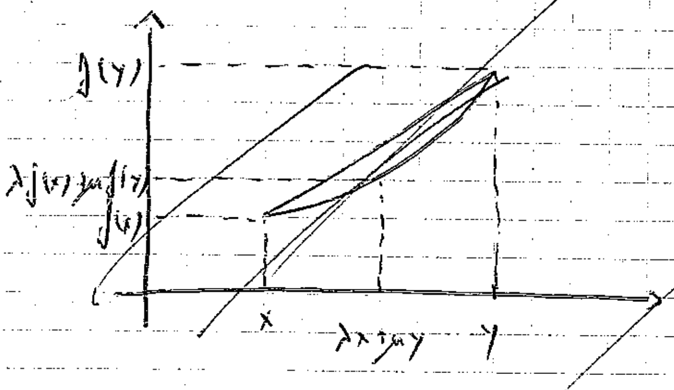
~~Pour montrer le théorème on aura besoin de la définition suivante~~

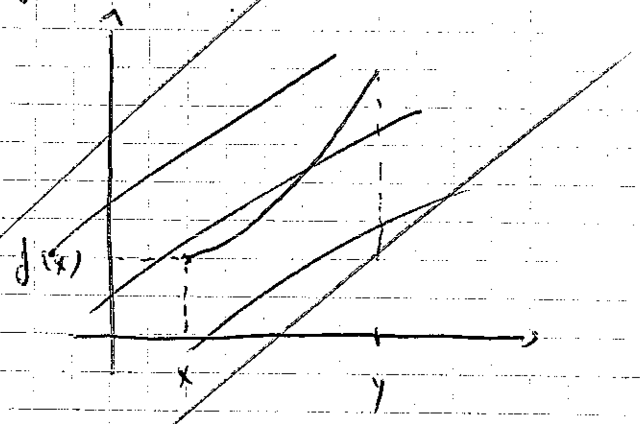
Définition

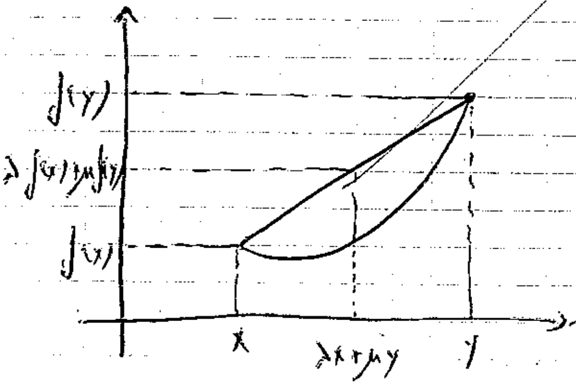
Une fonction numérique f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite convexe, si, quels que soient $x, y \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, on a l'inégalité

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Elle est dite concave, si $-f$ est convexe.







~~Exemple : ln est concave.~~

Preuve (Théorème)

ln étant concave, si $a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ on a

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\overset{n}{\log} a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln a + \ln b$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq a\cdot b \qquad (*)$$

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

On pose $a = t|x_i|$ et $b = |y_i|$

$(*)$ donne

$$|x_i||y_i| \leq \frac{1}{t}\left(\frac{t^p}{p}|x_i|^p + \frac{|y_i|^q}{q}\right)$$

et

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \underbrace{\frac{1}{p}t^{p-1}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right) + \frac{t^{-1}}{q}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)}_{\text{On veut minimiser ce terme.}}$$

Soit

$$g(t) = \frac{1}{p}t^{p-1}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right) + \frac{t^{-1}}{q}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)$$

On a

$$g'(t) = \frac{p-1}{p}t^{p-2}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right) * -\frac{t^{-2}}{q}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)$$

$$= \frac{1}{q}t^{-2}\left(t^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p - \sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)$$

$$t = \left(\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$ donne le résultat. $\square$

Corollaire (exemple 3)

$\| \ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

(ii)

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{p-1}|x_i|\right) + \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{p-1}|y_i|$$

Hölder ↘

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} (\|x\|_p + \|y\|_p) \text{, i.e.}$$

$$\|x+y\|_p^p \leq \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} (\|x\|_p + \|y\|_p)$$

Mais $p - \frac{p}{q} = p\left(1-\frac{1}{q}\right) = 1$. Donc $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (inégalité de Minkowski)

(iii) Supposons $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 0$

$\Rightarrow \forall_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i|^p = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\} \quad x_i = 0$

Exemple 4

Soit X un ensemble. On note

$\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) = \{ f \in \mathbb{R}^X : \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \ |f(x)| \leq A \}$.

C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

On pose

$$\forall f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Montrons que $\|.\|_\infty : \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$

(i) Soit $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda| \, |f(x)|$$

$$= |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \, \|f\|_\infty$$

(ii) Soit $f, g \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$

$$\forall x \in X \quad |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \quad ~~\|f+g\|~~ \ |(f+g)(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \quad \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

(iii) Si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\forall x \in X \quad |f(x)| = 0$

$$\Rightarrow \forall x \in X \quad f(x) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

NB. La norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ est un cas particulier de l'exemple 4 ($X = \{1, .., n\}$). Comme tout ensemble fini a un plus grand élément on peut prendre le max.

Exemple 5

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\|\,\| : E \to \mathbb{R}_+$ une norme et $F \subset E$ un sous espace vectoriel, alors $\|\,\|_{|F}$ est une norme sur F.

Cas particulier fondamental

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors

$$C([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R})$$

$$\|.\|_\infty : C([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

(car $t \mapsto |f(t)|$ est continue et donc atteint ses

cours 7 bornes).

cours 8 **Exemple 6**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ On considère

$$\|.\|_p : C([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f \longmapsto \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Montrons que $\|.\|_p$ est une norme sur $C([a,b], \mathbb{R})$.

(i) est vérifié

(ii) Soit $f, g \in C([a,b]; \mathbb{R})$.

Soit $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$

$$\|f+g\|_p = \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{b-a}{n+1}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right) + g\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right) \right|^p \right)^{1/p}$$

Minkowski

$$\le \lim_{n \to \infty} \left(\frac{b-a}{n+1}\right)^{1/p} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right) \right|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{n} \left| g\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right) \right|^p \right)^{1/p} \right\}$$

d'où $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

(iii) Si $f \neq 0$, alors $\|f\|_p \neq 0$.

Si $f \neq 0$ alors il existe $c \in [a,b]$ t.q. $f(c) \neq 0$.

f est continue donc il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$\forall x \in [a,b]$, $|x-c| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{|f(c)|}{2}$

Soit

$$g : \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \left|\frac{f(c)}{2}\right| & \text{si } |x-c| < \eta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors $\forall x \in [a,b]$ $|f|^p \geq g^p$

donc

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$$

$$\geq (\min(b-a, \eta))^{1/p} \frac{|f(c)|}{2} > 0.$$

Définition

~~Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Alors on appelle l'application $d : \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) \longmapsto \|u-v\| \end{array}$~~

~~la distance associé à la norme $\|.\|$.~~

2 Formes bilinéaires et produits scalaires

Définition 1

- Soit E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une forme bilinéaire sur $E\times F$ est une application $\varphi : E\times F \to \mathbb{R}$ qui vérifie les deux conditions suivantes

1) $\forall y \in F$ $\quad \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi(x,y) \end{array}$ est linéaire

2) $\forall x \in E$ $\quad \begin{array}{l} F \to \mathbb{R} \\ y \longmapsto \varphi(x,y) \end{array}$ est linéaire

- On appelle forme bilinéaire sur E une forme bilinéaire sur $E\times E$.
- Une forme bilinéaire sur E est dite symétrique si $\forall x, y \in E \quad \varphi(y,x) = \varphi(x,y)$

Définition 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une forme quadratique sur E est une application $q : E \to \mathbb{R}$ t.q.

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in E \qquad q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$

2) $\varphi : \begin{array}{l} E\times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) \end{array}$

est bilinéaire. On dit alors que φ est la forme bilinéaire associée à q.

NB

- Si q est une forme quadratique sur E et φ la forme bilinéaire associée, alors

1) $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) = q(x)$

2) φ est symétrique.

- Inversement si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, alors

$q : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi(x,x) \end{array}$ est une forme quadratique et

$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$. cours 7

Définition

Soit E un ~~espace~~ $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit q une forme quadratique sur E. Alors

- q est dite positive ssi
$\forall x \in E \quad q(x) \geq 0$
- q est dite définie positive ssi
$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad q(x) > 0$.

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire $\langle\cdot;\cdot\rangle$ sur E est une forme bilinéaire symétrique sur E t.q. la forme quadratique associée est définie positive.
On appelle un espace préhilbertien réel un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

Proposition (Cauchy - Schwarz)

- Si q est une forme quadratique positive sur E et φ une forme bilinéaire associée, alors

$$\forall x, y \in E \qquad \varphi(x,y)^2 \leq q(x)\, q(y)$$

- Si q est définie positive alors

$$\varphi(x,y)^2 = q(x)\, q(y)$$

Ssi x et y sont colinéaires.

Preuve

Le résultat est vrai si $x = 0$ ou $y = 0$.

- On considère pour $x, y \in E \setminus \{0\}$

$$T_{(x,y)} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \lambda & \longmapsto & q(x+\lambda y) = \lambda^2 q(y) + 2\lambda\varphi(x,y) + q(x) \end{array}$$

Si $q(y) = 0$ alors $T_{(x,y)} \geq 0$ $\forall \lambda$ possible seulement si $\varphi(x,y) = 0$

Si ~~Comme~~ $q(y) > 0$, $T_{(x,y)}$ atteint son minimum en

$$\lambda = -\frac{\varphi(x,y)}{q(y)}$$

et ce minimum vaut

$$\frac{1}{q(y)}\left(\varphi(x,y)^2 - 2\varphi(x,y)^2 + q(x)\, q(y)\right)$$

donc

$$\varphi(x,y)^2 \leq q(x)\, q(y)$$

- Si $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\varphi(x,y)^2 = \lambda^2 \varphi(x,x)^2 = \lambda^2 q(x)^2 = q(x)\, q(y)$$

- Si q est définie positive et $\varphi(x,y)^2 = q(x)\, q(y)$

alors si $y \neq 0$ on a

$$T_{(x,y)}\left(-\frac{\varphi(x,y)}{g(y)}\right) = 0 \quad , i.e.$$

$$g\left(x - \frac{\varphi(x,y)}{g(y)} y\right) = 0 \quad , i.e. \quad x = \frac{\varphi(x,y)}{g(y)} y. \quad \square$$

Prop

Soit g une forme quadratique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Alors

$$\|\cdot\| : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{g(x)} \end{array}$$ est une norme sur E.

En particulier si $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ définit une norme sur E.

Preuve

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ x \in E$

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\alpha^2 g(x)} = |\alpha| \, \|x\|$$

(ii) Soient $x, y \in E$

$$\|x+y\|^2 = g(x+y)$$
$$= g(x) + 2\varphi(x,y) + g(y)$$
Cauchy-Schwarz $\longrightarrow$
$$\leq g(x) + 2\sqrt{g(x)g(y)} + g(y)$$
$$= \left(\sqrt{g(x)} + \sqrt{g(y)}\right)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

donc $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(iii) $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x = 0. \quad \square$

Cas particulier

Soit $E = \mathbb{R}^n$.

- Soit q une forme quadratique sur E et φ la forme bilinéaire associée. On définit

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{ } i \text{ ème place}}{1}, 0 \dots 0)$$

et

$$\mathrm{Mat}_e(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

C'est une matrice symétrique

Si $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$.

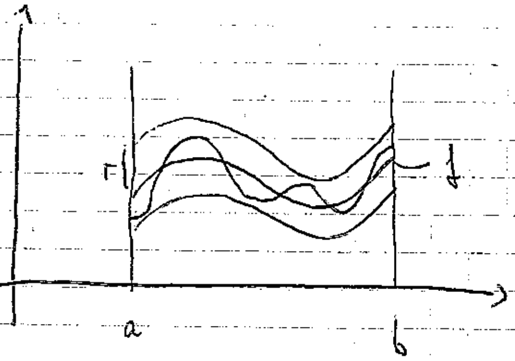
Alors on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

donc
$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$$
$$= {}^t X \, \mathrm{Mat}_e(\varphi) Y$$

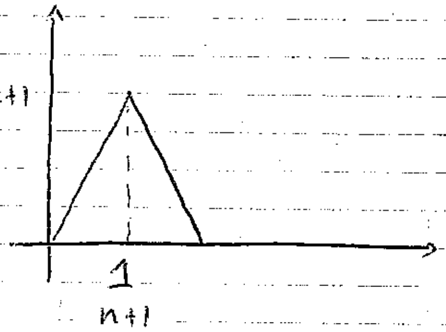
- la forme quadratique

$$q : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{array}$$

redonne la norme $\|.\|_2$.



- Considérons $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_1$. Soit pour $n \in \mathbb{N}$



$$f_n : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} (n+1)^2 t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n+1} \\ 2(n+1)-(n+1)^2 t & \text{si } \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{2}{n+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

$\int_0^1 |f_n|\, dt = 1$, mais f_n prend des valeurs arbitrairement grandes i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f_n\| = 1$ mais $\|f_n\|_\infty \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$.

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$. On dit que A est bornée si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) $\{\|x\| : x \in A\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

(ii) $\{\|x\| : x \in A\}$ admet un majorant.

(iii) $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ $A \subset B(0,r)$

~~(v) $\exists x_0 \in E$ $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ $A \subset$~~

(iv) $\exists x_0 \in E$ $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ $A \subset B(x_0,r)$

(v) $\forall x_0 \in E$ $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ $A \subset B(x_0,r)$

$\Updownarrow$

Preuve

$\Rightarrow$ (iv)

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte des définitions.

~~(ii) $\Rightarrow$ (i) r est clairement majorant de $\{\|x\| : x \in A\}$ qui est minoré par 0~~

(iv) $\Rightarrow$ (v) résulte du fait que pour $x, y \in E$ $B(x,r) \subset B(y, r + \|y-x\|)$

(v) $\Rightarrow$ (i) On applique (v) à $x_0 = 0$ et on obtient un majorant de $\{\|x\|, x \in A\}$ qui est minoré par 0.

4 Suite d'un espace vectoriel normé

L'idée est qu'une norme généralise la notion de valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et qu'on va essayer d'étendre ce qu'on a vu pour $\mathbb{R}$ aux espaces vectoriels normés.

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~[illegible]~~ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ssi elle vérifie les conditions équivalentes suivantes

(i) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$

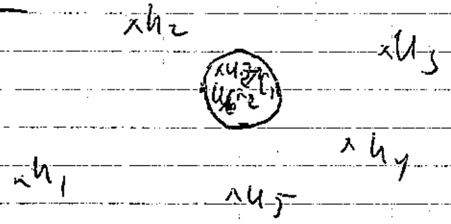
(ii) $\overbrace{\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$ suite de nombres réels

(iii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq N \quad u_n \in B(\ell, \varepsilon)$

On note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $\ell \in E$ t.q $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Dess —



Remarque

Si $u_n \underset{n\to\infty}{\to} l$, alors $\|u_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|l\|$

En effet $\big|\|u_n\| - \|l\|\big| \leq \|u_n - l\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. cours !

Prop / Def

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de E, alors il existe un unique l t.q.

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} l$$

on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Preuve comme pour les suites réelles.

Déf

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée ssi $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ est borné.

Proposition

Une suite convergente d'un espace vectoriel normé est bornée.

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $(E, \|.\|)$.
On a vu que $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Donc $\{\|u_n\| : n\in\mathbb{N}\}$ est borné. $\square$

Remarque

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de E et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si $u_n \to a$, $v_n \to b$, alors $\lambda u_n + \mu v_n \to \lambda a + \mu b$.

Preuve : Exercice.

Exemple 1

On considère $\mathbb{R}^m$ muni de $\|.\|_\infty$.

Lemme

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^m$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n1}, .., u_{nm})_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi toutes les suites $(u_{nj})_{n\in\mathbb{N}}$ $j = 1, .., m$ convergent.

Preuve

"$\Leftarrow$" Si $u_{nj} \xrightarrow[n\to\infty]{} l_j$ pour $j \in \{1, .., m\}$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N_1, .., N_m$ t.q.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq N_j$ $|u_{nj} - l_j| < \varepsilon$

Soit $N = \max_{1\leq j\leq m}(N_j)$

On a $\forall n\in\mathbb{N}$ $n \geq N$ $\max_{1\leq j\leq m} |u_{nj} - l_j| < \varepsilon$

donc $\max_{1\leq j\leq m} |u_{nj} - l_j| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

"$\Rightarrow$" $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

ssi $\|u_n - l\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

ssi $\left(\max_{1\leq j\leq m} |u_{nj} - l_j|\right) \to 0$, $n\to\infty$

$\Rightarrow \forall\, 1\leq j\leq m$ $|u_{nj} - l_j| \to 0$,

i.e. $u_{nj} \to l_j$, $n\to\infty$.

Exemple 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$.

On considère $C([a,b];\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f ssi

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N} \ n\geq N \ \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

ssi

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N} \ n\geq N \ \forall x\in[a,b] \ |f_n(x) - f(x)|<\varepsilon$$

ssi (f_n) converge uniformément vers f.

Slogan

$\|.\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme.

5 Suites extraites et valeurs d'adhérence

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On appelle Suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante.

NB

1) Toute suite extraite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Preuve : exercice.

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la limite d'une suite extraite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition

~~Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Un élément l de E est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi~~

~~$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\{n\in\mathbb{N} : \|u_n - l\| < \varepsilon\}$ est infini~~

Remarque

l est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi

$\exists$ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $u_{\varphi(n)} \longrightarrow l$, $n \to \infty$

ssi $\exists$ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ———————— t.q. $\|u_{\varphi(n)} - l\| \to 0$, $n \to \infty$

ssi 0 est valeur d'adhérence de $(\|u_n - l\|)_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Un élément l de E est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\{n\in\mathbb{N} : \|u_n - l\| < \varepsilon\}$ est infini

$$\|$$

$$\{n\in\mathbb{N} \mid u_n \in B(l, \varepsilon)\}.$$

Preuve

Par la remarque qui précède

ℓ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ssi 0 ———————— de $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$

ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\{n \in \mathbb{N} : \|u_n - \ell\| < \varepsilon\}$ est infini. $\square$

Exemple

- On considère $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (1, n)$$

Supposons que $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ soit valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

t.q. $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$

i.e. (d'après l'exemple 1)

$$1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1 \quad \text{et} \quad \varphi(n) \underbrace{\xrightarrow[n\to\infty]{}}_{\text{absurde,}} \ell_2$$

donc u_n n'admet pas de valeur d'adhérence dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$.

Remarque

Le raisonnement qui précède montre que si $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m)$ est valeur d'adhérence de $(u_{n1}, \dots, u_{nm})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(\mathbb{R}^m, \|.\|_\infty)$ alors ℓ_i est valeur d'adhérence de $(u_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention la réciproque est fausse !

Exemple

Dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \big(\underset{\uparrow}{(-1)^n}, \underset{\uparrow}{(-1)^n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

1 est valeur d'adhérence de ⤴

−1 est valeur d'adhérence de ⤴

Mais $(1, -1)$ n'est pas valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|(1,-1) - ((-1)^n,(-1)^n)\|_* = 2$$

donc $\{ n \in \mathbb{N} : u_n \in \mathcal{B}((1,-1),1) \}$ est vide.

Cela rend plus subtil le théorème suivant :

Théorème (Bolzano - Weierstrass dans $\mathbb{R}^m$)

Toute suite bornée de $(\mathbb{R}^m, \|.\|_\infty)$ admet une valeur d'adhérence

Preuve

On raisonne par récurrence sur m. Si $m=0$ ou $m=1$ c'est vrai.

Supposons que le théorème soit vrai pour m

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}^{m+1}$. Soient

$$\phi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1,\dots,x_m,x_{m+1}) & \longmapsto & (x_1,\dots,x_m) \end{array}$$

$$\phi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_{m+1}) & \longmapsto & x_{m+1} \end{array}$$

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\phi_1(x), \phi_2(x)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$(*) \ \forall x \in \mathbb{R}^{m+1} \quad \|x\|_\infty = \max(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dans } \mathbb{R}^m}}{\|\phi_1(x)\|_\infty}, |\phi_2(x)|)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $V_n = \phi_1(u_n)$ et $\lambda_n = \phi_2(u_n)$

Il résulte de $(**)$ que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Par hypothèse de récurrence il existe une suite extraite de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. Il existe donc

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell_1 \in \mathbb{R}^m$ t.q.

$$V_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1 \quad \text{dans } (\mathbb{R}^m, \|.\|_\infty).$$

La suite $(\lambda_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car toute suite extraite d'une suite bornée est bornée. Elle admet donc une valeur d'adhérence ℓ_2 dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante t.q.

$$\lambda_{\varphi\circ\psi(n)} \to \ell_2, \quad n\to\infty.$$

La suite $(V_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(V_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, donc

$$V_{\varphi\circ\psi(n)} \longrightarrow \ell_1, \ n\to\infty, \ \text{i.e.}$$

$$\|V_{\varphi\circ\psi(n)} - \ell_1\|_\infty \longrightarrow 0, \quad n\to\infty$$

et

$$|\lambda_{\varphi\circ\psi(n)} - \ell_2| \to 0, \quad n\to\infty$$

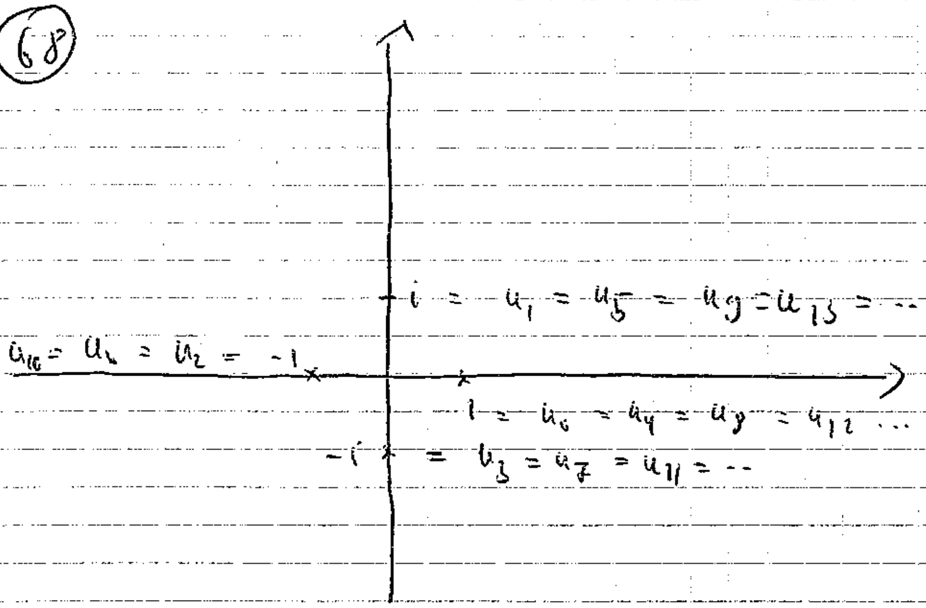
Donc par $(*)$

$$\|u_{\varphi\circ\psi(n)} - \phi^{-1}(\ell_1, \ell_2)\|_\infty \longrightarrow 0, \quad n\to\infty.$$

□

Exemple

On considère la suite $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.



Montrons que $-i$ est valeur d'adhérence.

- 0 est valeur d'adhérence de la suite des premières coordonnées des u_n $(\varphi(n) = 2n+1)$
- -1 est valeur d'adhérence de la suite des deuxièmes coordonnées de $(u_{\varphi(n)})$ $(\psi(n) = 2n+1$, $(\varphi \circ \psi)(n) = 4n+3)$

$\Rightarrow$ ~~$(0, -1) \cong i$~~ $-i$ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notons: ~~NB~~ $(i)^{4n+3} = -i\,(i)^{4n} = -i$

NB

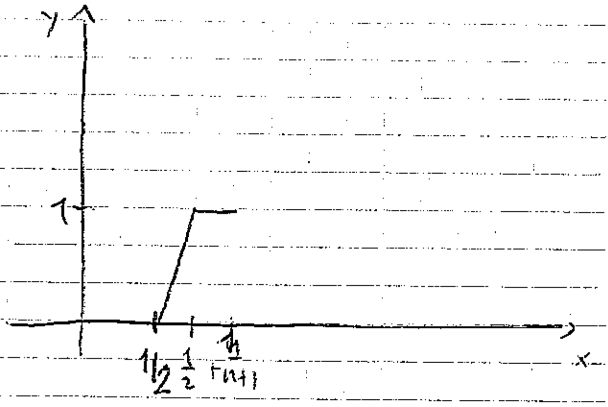
En dimension n il faut extraire n fois! / cours 9

Remarque

Cet énoncé ne vaut pas pour n'importe quel espace vectoriel normé !
L'hypothèse de la dimension finie est essentielle.
cours 9

cours 10 Exemple

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (n+1)(x - 1/2) & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, 1] \end{cases}$$



$\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue (exercice), i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $C([0,1],\mathbb{R})$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\|f_n\|_\infty = 1$.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

Mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence

En effet raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ t.q.

$$f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \text{dans } (C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$$

Comme $\|.\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme, cela signifie que

$(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, d'où

$(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, c.a.d.

$\forall x \in [0,1]$ $\quad f_{\varphi(n)}(x) \longrightarrow f(x)$, $n\to\infty$

Donc $\forall x \in [0,\frac{1}{2}]$ $\quad f(x) = 0$

Si $x > 1/2$ alors il existe $N>0$ t.q. $\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} < x$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad n \geq N \implies f_{\varphi(n)}(x) = 1$$

Donc : $\quad \forall x \in]\frac{1}{2},1] \qquad f(x) = 1$

Donc

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in]\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Cela contredit que $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ ↯,

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([0,1], \mathbb{R})$ bien que borné pour $\|.\|_\infty$, n'admet pas de valeur d'adhérence.

6 Comparaison de normes, nomes équivalentes

Définition / Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Soient $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ et $\|.\|' : E \to \mathbb{R}_+$ des normes sur E.

- On dit que $\|.\|'$ est plus fine que $\|.\|$ ssi elles vérifient les conditions équivalentes suivantes

(i) $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in E \quad \|x\| \leq \alpha \|x\|'$;

(ii) $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathcal{B}_{\|.\|'}(0,1) \subset \alpha \mathcal{B}_{\|.\|}(0,1)$;

(iii) $\mathcal{B}_{\|.\|'}(0,1)$ est borné pour $\|.\|$;

(iv) $\forall x \in E \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathcal{B}_{\|.\|'}(x,r)$ est borné pour $\|.\|$.

- On dit que $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes ssi elles vérifient les conditions équivalentes suivantes :

(i) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in E \quad \beta \|x\|' \leq \|x\| \leq \alpha \|x\|'$

(ii) $\|.\|'$ est plus fine que $\|.\|$ et $\|.\|$ est plus fine que $\|.\|'$

(iii) Une partie de E est bornée pour $\|.\|$ ssi elle est bornée pour $\|.\|'$.

Preuve

- Première série d'équivalences :

(i) ⇒ (ii) Pour tout $x \in B_{\|.\|'}(0,1)$ on a

$\frac{1}{\alpha}\|x\|' \leq 1/\alpha$, d'où $\|\frac{x}{\alpha}\| \leq \alpha \frac{1}{\alpha}\|x\|' \leq 1$,

i.e. $x \in \alpha B_{\|.\|}(0,1)$

(ii) ⇒ (iii) On utilise l'égalité $\alpha B_{\|.\|}(0,1) = B_{\|.\|}(0,\alpha)$ et la définition d'une partie bornée.

(iii) ⇒ (iv) Si $B_{\|.\|'}(0,1)$ est bornée par $\|.\|$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad B_{\|.\|'}(0,1) \subset B_{\|.\|}(0,\alpha)$$

d'où

$$B_{\|.\|'}(x,r) \subset B_{\|.\|'}(0, \|x\|+r) \subset B_{\|.\|}(0, \alpha(\|x\|+r))$$

(iv) ⇒ (i) $B_{\|.\|'}(0,1)$ est bornée par $\|.\|$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$B_{\|.\|'}(0,1) \subset B_{\|.\|}(0,\alpha)$$

Si $x \in E\setminus\{0\}$, $\frac{x}{2\|x\|'} \in B_{\|.\|'}(0,1) \subset B_{\|.\|}(0,\alpha)$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x}{2\|x\|'}\right\| \leq \alpha \text{, i.e. } \|x\| \leq 2\alpha\|x\|'$$

Exo

Montrer que si $B_{\|.\|'}(0,1) \subset B_{\|.\|}(0,\alpha)$, alors

$\forall x \in E \quad \|x\| \leq \alpha\|x\|'$.

2^{nde} 2^{e} série d'équivalences

(i) ⇔ (ii) résulte des définitions

(i) ⇔ (iii) résulte de l'équivalence (i) ⇔ (iv) de la première série d'équivalences.

NB

L'équivalence de normes est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

- $\|.\|$ est équivalente à $\|.\|$
- Si $\|.\|$ est équivalente à $\|.\|'$, alors $\|.\|'$ est équivalente à $\|.\|$
- Si $\|.\|$ est équivalente à $\|.\|'$ et $\|.\|'$ à $\|.\|''$, alors $\|.\|$ est équivalente à $\|.\|''$

Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $\|.\|$ et $\|.\|'$ des normes sur E. Si $\|.\|'$ est plus fine que $\|.\|$, alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et tout l de E si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ par $\|.\|'$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ par $\|.\|$.

Preuve

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\forall x \in E \quad \|x\| \le \alpha \|x\|'$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|u_n - l\| \le \alpha \|u_n - l\|'$

donc si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ pour $\|.\|'$, alors $\|u_n - l\|' \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

d'où $\|u_n - l\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ i.e. $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ par $\|.\|$

Corollaire 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $\|.\|$ et $\|.\|'$ des normes équivalentes sur E. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et tout l de E $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ par $\|.\|$ ssi $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ par $\|.\|'$

Cas particulier 2

- Si $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \int_a^b f \cdot g \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur E.

Définition

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Remarque

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors

$\forall x, y \in E \qquad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$

La preuve est la même qu'au chapitre 1.

3 Distance, boules et parties bornées

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle distance induite par la norme l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto \|x-y\| \end{aligned}$$

Proposition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, d la distance induite. On a :

(i) $\forall x,y \in E \quad d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(ii) $\forall x,y \in E \quad d(x,y) = d(y,x)$

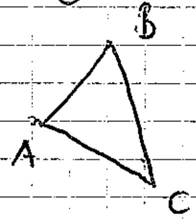
(iii) $\forall x,y,z \in E \quad d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

(iv) $\forall x,y,z \in E \quad |d(x,y)-d(x,z)| \leq d(y,z)$

(v) $\forall x,y,z \in E \quad d(x+z,y+z) = d(x,y)$

Remarque

(iii) est l'inégalité triangulaire pour $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^2$



$AC \leq AB + BC$

Cours8

(cours) Définition

Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance induite. Soit $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle

- Boule ouverte de centre x_0 et de rayon r

  $B(x_0,r) = \{x \in E : d(x,x_0) < r\}$

- Boule fermée

  $\overline{B}(x_0,r) = \{x \in E : d(x,x_0) \leq r\}$

- Sphère de centre x_0 et de rayon r

  $S(x_0,r) = \{x \in E : d(x,x_0) = r\}$.

Exemple

- On a vu les boules fermées pour $\|.\|_\infty$, $\|.\|_p$ $p=1,2$ ~~$p=1,2$~~ dans $\mathbb{R}^2$.
- Considérons $C([a,b];\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$. Soit $f \in C([a,b];\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}_+^*$

$$B(f,r) = \{g \in C([a,b];\mathbb{R}) : \forall x \in [a,b] \ |g(x)-f(x)| < r\}.$$

Corollaire 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\|.\|$ et $\|.\|'$ des normes sur E t.q. $\|.\|'$ soit plus fin que $\|.\|$
Alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $l \in E$
Si l est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\|.\|'$
alors l ______________________________ $\|.\|$

Corollaire 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\|.\|$ et $\|.\|'$ des normes équivalentes sur E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\|.\|$ sont les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\|.\|'$.

Théorème

Soit $m \geq 0$. Dans $\mathbb{R}^m$ les normes sont deux à deux équivalentes

NB1

- La convergence d'une suite de $\mathbb{R}^m$ ne dépend pas de la norme choisie
- L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite de $\mathbb{R}^m$ ne dépend pas de la norme choisie.

NB2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Il existe un entier m et un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\phi : \mathbb{R}^m \to E$$

Si $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ et $\|.\|' : E \to \mathbb{R}_+$ sont des normes

$$\|\phi(.)\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \|\phi(.)\|' : \mathbb{R}^n \to \cancel{\mathbb{R}^+}\ \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \|\phi(x)\| \qquad\qquad x \mapsto \|\phi(x)\|'$$

aussi (ϕ injective). Elles sont donc équivalentes : il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \alpha \|\phi(x)\|' \leq \|\phi(x)\| \leq \beta \|\phi(x)\|'$

Comme ϕ est surjective

$\forall y \in E \qquad \alpha\|x\|' \leq \|x\| \leq \beta \|x\|'$

Donc

Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, les normes sont deux à deux équivalentes.

Preuve du théorème

- Il suffit de montrer que toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes à $\|.\|_1$. Soit

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \quad \text{une norme.}$$
$$x \mapsto \|x\|$$

- Soit $e_1, \dots, e_n$ la base usuelle de $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{i^e \text{ place}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Si $x = (x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n)$,

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq (\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|) \|x\|_1$$

On note $\beta = (\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|)$

On a montré que $\|.\|_1$ est plus fine que $\|.\|$.

Preuve du théorème

- Il suffit de montrer que toutes les normes de $\mathbb{R}^m$ sont équivalentes à $\|.\|_\infty$. Soit

$$\|.\| : \begin{array}{l} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \|x\| \end{array} \quad \text{une norme.}$$

- Soit $e_1, \dots, e_n$ la base usuelle de $\mathbb{R}^m$, i.e.

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{i^e \text{ place}}{1}, 0, \dots 0)$$

Si $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^m x_i e_i\| \le \sum_{i=1}^m |x_i| \, \|e_i\| \le \cancel{\beta}\alpha \|x\|_\infty$$

avec $\cancel{\alpha} := \sum_{i=1}^m \|e_i\|$. On a montré que $\|.\|_\infty$ est plus fin que $\|.\|$.

Cours 10

- Supposons que $\|.\|$ ne soit pas plus fin que $\|.\|_\infty$.

Cours 11

Alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in \mathbb{R}^m \quad \|x\|_\infty > \alpha \|x\|$$

En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y_n \in \mathbb{R}^m \quad \|y_n\|_\infty > n \|y_n\| \geq 0,$$

en particulier $y_n \neq 0$. On pose

$$x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|_\infty}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\|_\infty = 1$ et $n \|x_n\| \le \|x_n\|_\infty = 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\| \le 1/n \Rightarrow x_n \to 0, \; n \to \infty$ par $\|.\|$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\|_\infty = 1 \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné par $\|.\|_\infty$.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$.

Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q.

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \qquad \text{par } \|\cdot\|_\infty$$

Donc $\quad 1 = \|x_{\varphi(n)}\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} \|\ell\|_\infty$, i.e. $\|\ell\|_\infty = 1$.

Mais $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\| \le \overset{\alpha}{\cancel{A}} \|x - y\|_\infty$

donc $\quad \big|\|x_{\varphi(n)}\| - \|\ell\|\big| \le \|x_{\varphi(n)} - \ell\|$

$$\le \overset{\alpha}{\cancel{\beta}} \|x_{\varphi(n)} - \ell\|_\infty \to 0$$

Mais $\|x_{\varphi(n)}\| \to 0$, donc $\|\ell\| = 0 \Rightarrow \ell = 0$, ce qui contredit $\|\ell\|_\infty = 1$. ↯ □

Exemple 1

pour $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
Sur $\mathbb{R}^n$ les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalents

Exemple 2

On a construit dans la section 3 une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C([0,1],\mathbb{R})$ t.q.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_1 = 1$ et $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
Donc les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalents.
En particulier $C([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie.

Corollaire (Bolzano - Weierstrass)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute suite bornée de E (pour n'importe quelle norme) admet une valeur d'adhérence (pour n'importe quelle norme).

7 Parties denses dans un espace vectoriel normé

Définition

~~Soit~~ Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset B \subset E$. Alors on dit que A est dense dans B si elles vérifient les conditions équivalentes suivantes

(i) Pour tout $b \in B$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A t.q. $u_n \xrightarrow{n \to \infty} b$

(ii) $\forall b \in B \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ B(b, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

NB

Si $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes, A est dense dans B pour $\|.\|$ ssi elle l'est pour $\|.\|'$.

Preuve

(i) =) (ii)

Soit $b \in B$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

Par (i) il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de A t.q.

$$u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\|u_N - b\| < \varepsilon$ et $u_N \in B(b, \varepsilon) \cap A$.

⑦⑧ $(ii) \Rightarrow (i)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit $u_n \in \mathcal{B}(b, \frac{1}{n+1}) \cap A$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n - b\| < \frac{1}{n+1}, \text{ donc } u_n \to b. \square$$

Exemples

1) A est dense dans A.

2) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (Corollaire I.4.1)

3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

En effet $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ donc $\forall a, b \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\frac{a}{b\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{\lfloor (n+1)\sqrt{2}x \rfloor}{(n+1)\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

On a $\quad (n+1)\sqrt{2}\, u_n \le (n+1)\sqrt{2}\, x \le (n+1)\sqrt{2}\, \overset{u_n}{\cancel{x}} + 1$

d'où $\quad x - \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le u_n \le x \le \cancel{x + \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}} \quad \cancel{u_n} + \cancel{\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}},$

donc

$$u_n \to x.$$

Rq : la même preuve montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ en prenant

$$u_n = \frac{\lfloor (n+1)x \rfloor}{n+1} \in \mathbb{Q}$$

4) Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés

$$\|.\|_\infty : \begin{array}{l} E \times F \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \longmapsto \max(\|x\|_E, \|y\|_F) \end{array}$$

est une norme (exercice). Soit $A \subset E$ et $B \subset F$.

Alors

$A\times B$ est dense dans $E\times F$ ssi

A est dense dans E et B est dense dans F.

⌈ En effet

$\forall (x,y)\in E\times F \qquad \forall \varepsilon\in \mathbb{R}_+^*$

$$B_{E\times F}((x,y),\varepsilon) = B_E(x,\varepsilon)\times B_F(y,\varepsilon)$$

et $\quad B_E(x,\varepsilon)\times B_F(y,\varepsilon)\cap A\times B = (B_E(x,\varepsilon)\cap A)\times(B_F(y,\varepsilon)\cap B$

$A\times B$ est dense dans $E\times F$

~~ssi $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^* \ \forall x\in E \ \forall y\in F \ (B_{E\times F}(x,\varepsilon)\cap A)$~~

ssi $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^* \ \forall x\in E \ \forall y\in F \ B_{E\times F}((x,y),\varepsilon)\cap A\times B\neq\emptyset$

ssi ——————————— $B_E(x,\varepsilon)\times B_F(y,\varepsilon)\cap A\times B\neq\emptyset$

ssi ——————————— $B_E(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ et $B_F(y,\varepsilon)\cap B\neq\emptyset$

$$\text{ssi}\begin{cases}\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^* \ \forall x\in E \quad B_E(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset\\ \text{et}\\ \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^* \ \forall y\in F \quad B_F(y,\varepsilon)\cap B\neq\emptyset\end{cases}$$

ssi A est dense dans E et B est dense dans F. ⌋

Par récurrence, on en déduit que si $(A_i)_{1\le i\le n}$ est une famille de parties de $\mathbb{R}$ alors

$A_1\times\dots\times A_n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall i\in[\![1,n]\!]$ A_i est dense dans $\mathbb{R}$.

<u>Cas particuliers</u>

$\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathbb{R}^2$.

5) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors pour tout x de E et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(x,r)$ est dense dans $\overline{B}(x,r)$.

En effet soit $y \in \overline{B(x,r)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ posons $u_n = y + (x-y)\frac{1}{n+1}$.

$\|u_n - x\| = (1 - \frac{1}{n+1})\|x-y\| < r$

donc $u_n \in B(x,r)$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$.

6) On considère

$$ev_0 : \begin{array}{ccc} C([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

C'est une forme linéaire sur $C([0,1],\mathbb{R})$ (c'est à dire une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Soit $H = \operatorname{Ker}(ev_0) = \{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \ ; \ f(0) = 0 \}$.

- $\forall f, g \in C([0,1],\mathbb{R}) \quad |f(0) - g(0)| \leq \|f - g\|_\infty$

Donc si $g \in C([0,1],\mathbb{R})$ vérifie $g(0) \neq 0$ et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $C([0,1],\mathbb{R})$ convergeant vers g alors $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(0)$

donc $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad |f_n(0)| > 0$

donc $\exists N \in \mathbb{N} \quad f_N \notin H$

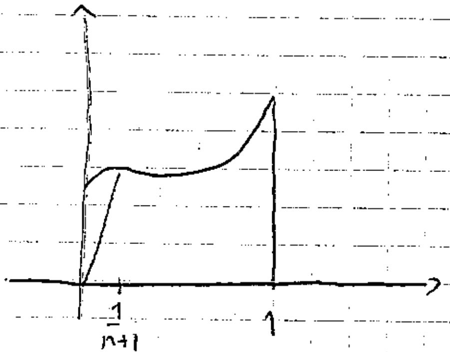
et H n'est pas dense dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

- Soit $g \in C([0,1], \mathbb{R})$, $p \in [1, \infty[$

pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_n : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x > \frac{1}{n+1} \\ x(n+1)\,g(\frac{1}{n+1}) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+1}] \end{cases} \end{array}$$

f_n est continue et $f_n \in H$.



$$\|g - f_n\|_p$$
$$= \left(\int_0^1 |g - f_n|^p\right)^{1/p}$$
$$= \left(\int_0^{\frac{1}{n+1}} |g - f_n|^p\right)^{1/p}$$

$\forall x \in [0, \frac{1}{n+1}]$ $\quad |g(x) - f_n(x)| \leq |g(x)| + |f_n(x)| \leq 2\|g\|_\infty$

Donc
$$\|g - f_n\|_p \leq 2\|g\|_\infty \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/p} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Donc $f_n \longrightarrow g$ pour $\|.\|_p$

H est dense dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_p)$

En particulier $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

8 Fonctions continues entre espaces vectoriels normés

8.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés.

Soit $A \subset E$, soit $f : A \longrightarrow F$ une application et soit $x_0 \in A$.

- On dit que f est continue en x_0 ssi elle vérifie les conditions équivalentes suivantes

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \; \|x - x_0\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \; f(B_E(x_0, \eta) \cap A) \subset B_F(f(x_0), \varepsilon)$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \; B_E(x_0, \eta) \cap A \subset f^{-1}(B_F(f(x_0), \varepsilon))$

- On dit que f est continue (sur A) ssi elle est continue en tout point de A.

Rappel : Si $f : X \to Y$ est une application et $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Preuve

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) résulte de la définition d'une boule

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Si $X \subset A$ et $Y \subset F$ on a équivalence entre

$$f(X) \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in X \; f(x) \in Y \Leftrightarrow X \subset f^{-1}(Y). \; \square$$

Exemple 1

Soit $E = F = \mathbb{R}$ et $A \subset E$.

$f : A \to \mathbb{R}$ est continue au sens des espaces vectoriels normés ssi elle est continue au sens usuel.

Exemple 2

Si $f : A \to F$ est continue et $B \subset A$ alors $f|_B : B \to F$ est continue

Définition

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $k \in \mathbb{R}_+$. Une application $f : A \to F$ est dite k-lipschitzienne si

$\forall x, y \in A \quad \|f(y) - f(x)\|_F \leq k \|y - x\|_E$

Proposition

Une application k-lipschitzienne est continue.

Preuve

Soit $x_0 \in A$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in A, \ \|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{k+1} \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. □

Exemple 3

$\|.\| : E \to \mathbb{R}$ est 1 lipschitzienne. En effet $\forall x, y \in E \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, donc $\|.\|$ est continue.

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$ une partie non vide. Soit $x \in E$.

$\{\|y - x\|, y \in A\} \neq \emptyset$, minoré par 0.

On définit

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} (\|y - x\|)$$

Exemple

$A = \{\frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$

$d(0, A) = 0$, la distance n'est pas nécessairement atteinte.

Proposition

Avec les notations qui précèdent
$d(\cdot, A) : E \to \mathbb{R}$ est 1 lipschitzienne, i.e.
$\forall x, y \in E \quad |d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$
donc $d(\cdot, A)$ est continue.

Preuve

Soient $x, y \in E$. Pour tout $z \in A$, on a

$$\|x - z\| \leq \|x-y\| + \|y - z\|$$

Comme l'inf est un minorant

$$d(x,A) \leq \|x-y\| + \|y-z\| \quad \text{i.e.}$$

$$d(x,A) - \|x-y\| \leq \cancel{d(y,A)}\ \|y-z\|.$$

Comme c'est le plus grand des minorants
$d(x,A) - \|x-y\| \leq d(y,A)$. Donc
$d(x,A) - d(y,A) \leq \|x-y\|$ et on échange x et y. □

Exemple 4

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés

$$\|.\|_\infty : \begin{array}{l} E\times F \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) \longmapsto \max(\|x\|_E, \|y\|_F) \end{array}$$

$$pr_1 : \begin{array}{l} E\times F \longrightarrow E \\ (x,y) \longmapsto x \end{array} \quad \text{et} \quad pr_2 : \begin{array}{l} E\times F \longrightarrow F \\ (x,y) \longmapsto y \end{array}$$

sont 1 lipschitziennes donc continues.

Exemple 5

Soit $\|.\|$ et $\|.\|'$ des normes sur E. Si $\|.\|'$ est plus fine que $\|.\|$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$\forall x \in E \qquad \|x\| \leq \alpha \|x\|'$

Alors

$$Id_E : (E, \|.\|') \longrightarrow (E, \|.\|)$$

est α lipschitzienne donc continue.

Cours 11

Cours 12

Proposition

Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$.
Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ des applications continues t.q. $f(A) \subset B$. Alors
$g \circ f : A \to B$ est continue

Preuve

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in A$. Comme g est continue, il existe $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$\forall y \in B \qquad \|y - f(x_0)\|_F < \varepsilon' \Rightarrow \|g(y) - g(f(x_0))\|_G < \varepsilon$.

Comme f est continue il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$\forall x \in A \qquad \|x - x_0\|_E < \eta$ ~~$\Rightarrow \|g(f(x)) - g(f(x_0))\|_G < \varepsilon$~~

$\Rightarrow \|f(y) - f(x_0)\|_F < \varepsilon'$

Donc

$\forall x \in A \qquad \|x - x_0\|_E < \eta \Rightarrow \|g(f(x)) - g(f(x_0))\|_G < \varepsilon$

Corollaire

Soit E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels
Soit $\|.\|_E$ et $\|.\|'_E$ des normes équivalentes sur E
Soit $\|.\|_F$ et $\|.\|'_F$ des normes équivalentes sur F

Soit $A \subset E$. Alors $f : A \to F$ est continue pour $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ ssi elle l'est par $\|.\|_{E'}$ et $\|.\|_{F'}$.

Preuve

Par symétrie, il suffit de montrer que si f est continue pour $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ elle l'est pour $\|.\|_E'$ et $\|.\|_F'$. Mais $f : (A, \|.\|_E') \to (F, \|.\|_F')$ est la composée de

$$\begin{tikzcd}
(A, \|.\|_E') \arrow[r, "Id_A"] \arrow[r, phantom, "\overset{\uparrow}{\text{continue par l'exemple 5}}", yshift=-6ex] & (A, \|.\|_E) \arrow[r, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\uparrow}{\text{continue par hypothèse}}", yshift=-6ex] & (F, \|.\|_F) \arrow[r, "id_F"] \arrow[r, phantom, "\overset{\uparrow}{\text{continue par l'exemple 5}}", yshift=-6ex] & (F, \|.\|_{F'})
\end{tikzcd}$$

Proposition

Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F_1, \|.\|_{F_1})$ et $(F_2, \|.\|_{F_2})$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$ et soit $f_1 : A \to F_1$ et $f_2 : A \to F_2$ des applications.

On munit $F_1 \times F_2$ de la norme

$$\|.\|_\infty : \begin{array}{ccc} F_1 \times F_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \max(\|x_1\|_{F_1}, \|x_2\|_{F_2}) \end{array}$$

Alors l'application

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F_1 \times F_2 \\ x & \longmapsto & (f_1(x), f_2(x)) \end{array}$$

est continue ssi f_1 et f_2 le sont.

Preuve

$\Rightarrow$ On a vu que $pr_1 : \begin{array}{l} F_1 \times F_2 \longrightarrow F_1 \\ (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \end{array}$ et

$pr_2 : \begin{array}{l} F_1 \times F_2 \longrightarrow F_2 \\ (x_1, x_2) \longmapsto x_2 \end{array}$ sont continues

Or $f_i = pr_i \circ f$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Si f est continue, alors f_1 et f_2 aussi.

$\Leftarrow$ On suppose que f_1 et f_2 sont continues. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $x_0 \in A$.

Si $i \in \{1, 2\}$ il existe $\eta_i \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$\forall x \in A \quad \|x - x_0\|_E < \eta_i \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(x_0)\|_{F_i} < \varepsilon$$

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in A \quad \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow \max(\|f_1(x) - f_1(x_0)\|_{F_1}, \|f_2(x) - f_2(x_0)\|_{F} <$$

i.e.

$$\forall x \in A \quad \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_\infty < \varepsilon. \qquad \square$$

Corollaire

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$ et soient $f_1, \dots, f_n$ des applications de A dans $\mathbb{R}$.
Alors

$$f : \begin{array}{l} A \longrightarrow \mathbb{R}^n \leftarrow \text{muni d'une norme arbitraire} \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

est continue ssi $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ f_i est continue.

Preuve

Il suffit de le montrer pour $\|\cdot\|_\infty$. On raisonne alors par récurrence sur n. $\square$

Corollaire 2

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés et $A \subset E$.
L'ensemble des applications continues de A dans F est un sous-espace vectoriel de F^A (qu'on note $C(A,F)$ lorsqu'aucune ambiguité est à craindre sur les normes choisies)

Preuve : ~~Exercice~~

~~Corollaire 3~~

~~Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$.~~
~~Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue et soit $g : A \to \mathbb{R}$ une application continue~~

Preuve :
On munit $F \times F$ de la norme

$$\|.\|_\infty : \begin{array}{l} F \times F \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) \longmapsto \max(\|x\|_F, \|y\|_F) \end{array}$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- $\forall (x,y), (x',y') \in F \times F$

$$\|(\lambda x' + \mu y') - (\lambda x + \mu y)\|_F \leq |\lambda| \|x'-x\|_F + |\mu| \|y'-y\|_F$$

$$\leq (|\lambda| + |\mu|) \|(x'-x, y'-y)\|_\infty$$

donc l'application $\psi : \begin{array}{l} F \times F \longrightarrow F \\ (x,y) \longmapsto \lambda x + \mu y \end{array}$

est $(|\lambda| + |\mu|)$ lipschitzienne donc continue.

- Si $f : A \to F$ et $g : A \to F$ sont continues

$$(f,g) : \begin{array}{l} A \to F \times F \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \end{array} \quad \text{aussi}$$

et $\lambda f + \mu g = \varphi \circ (f,g)$ aussi. □

Corollaire 3

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$.

Soit ~~$f,g : A \to$~~ $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue

et soit $g : A \to F$ une application continue

Alors

$$fg : \begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto f(x)g(x) \end{array}$$

est continue.

Preuve

On munit $\mathbb{R} \times F$ de la norme $\|.\|_\infty : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times F \to \mathbb{R}_+ \\ (\lambda, x) \mapsto \max(|\lambda|, \|x\|_F) \end{array}$

Soit

$$m : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times F \to F \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times F$

Posons

$$\eta = \min\left(|\lambda_0|, \frac{\varepsilon}{2|\lambda_0| + \|x_0\|_F + 1}\right)$$

Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times F$. Si $\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\|_\infty < \eta$, alors

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\|_F \leq \|\lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0) x_0\|_F$$

$$\leq |\lambda| \|x - x_0\|_F + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\|_F$$

$$\leq (\underbrace{|\lambda - \lambda_0|}_{< |\lambda_0|} + |\lambda_0|) \|x - x_0\|_F + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\|_F)$$

$$\leq \eta (2|\lambda_0| + \|x_0\|_F) < \varepsilon$$

donc m est continue, donc $f \cdot g = m \circ (f,g)$ est continue. □

Proposition

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(E', \|.\|_{E'})$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. On munit $E\times E'$ de la norme

$$\|.\|_\infty : \begin{array}{l} E\times E' \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,x') \longmapsto \max(\|x\|_E, \|x'\|_{E'}) \end{array}$$

Soit $A \subset E\times E'$ et $f : A \to F$ une application.
Si f est continue, alors

1) $\forall x_0 \in E$ $\quad f_{x_1} : \begin{array}{l} \{x \in E' : (x_1, x) \in A\} \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x_1, x) \end{array}$

est continue

2) $\forall x_0' \in E'$ $\quad f_{x_0'} : \begin{array}{l} \{x \in E : (x, x_0') \in A\} \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x, x_0') \end{array}$

est continue.

Preuve

Les applications

$j_{x_1} : \begin{array}{l} E' \longrightarrow E\times E' \\ x \longmapsto (x_1, x) \end{array}$ $\qquad j_{x_0'} : \begin{array}{l} E \longrightarrow E\times E' \\ x \longmapsto (x, x_1) \end{array}$

sont 1 lipschitziennes donc continues, leur restrictions également. $\square$

Attention : La réciproque est fausse en général.

Exemple

On considère

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = 0 \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$

Si $x_0 \neq 0$ $\quad f_{x_0} : \quad y \longmapsto \dfrac{x_0 y}{x_0^2 + y^2}$ est continue

Si $x_0 = 0$ $\quad f_{x_0} : \quad y \longmapsto 0$ est continue.

Si $y_0 \in \mathbb{R}$

Si $y_0 \neq 0$ $\quad f_{y_0} : \quad x \longmapsto \dfrac{x\, y_0}{x^2 + y_0^2}$ est continue

Si $y_0 = 0$ $\quad f_{y_0} : \quad x \longmapsto 0$ est continue.

Mais

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \left\| \left(\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right) - (0,0) \right\|_\infty < \eta \quad \text{et}$$

$$\left\| f\left(\frac{\eta}{2}, \eta/2\right) - f(0,0) \right\| = \frac{1}{2}$$

8.2. Suites et continuité

Théorème

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$ et soit $f : A \to F$ une application. Alors il y a équivalence entre

(i) f est continue

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A et pour tout $a \in A$

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \implies f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

Preuve analogue au cas $E = F = \mathbb{R}$ (exercice).

Corollaire

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$ et soit $f : A \to E$ une application continue t.q. $f(A) \subset A$. Soit $\lambda \in A$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \lambda$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$ avec $\ell \in A$, alors $f(\ell) = \ell$.

Preuve. Exercice.

8.3. Densité et continuité

Proposition

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue. Si A' est une partie dense de A, $f(A')$ est dense dans $f(A)$.

Preuve

Soit $y \in f(A)$. Soit $x \in A$ t.q. $y = f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$

On veut montrer que $f(A') \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset$

Par définition de la continuité $\exists \eta > 0$ t.q.

$$B(x, \eta) \subset f^{-1}(B(y, \varepsilon)) = \{ t \in A : f(t) \in B(y, \varepsilon) \}$$

Par définition de la densité

$A' \cap B(x, \eta) \neq \emptyset$. Soit $t \in A' \cap B(x, \eta)$

$f(t) \in f(A') \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset$

Donc $f(A')$ est dense dans $f(A)$. $\square$

Cours 12

Théorème

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés.
Soit $A \subset E$
Soit $f : A \to F$ et $g : A \to F$ des applications continues
Soit A' une partie dense de A. Si
$f|_{A'} = g|_{A'}$ alors $f = g$.

Preuve

Montrons que si $f \neq g$ alors $f|_{A'} \neq g|_{A'}$.

Soit $x_0 \in A$ t.q. $f(x_0) \neq g(x_0)$

Mais $h = f - g : \begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto f(x) - g(x) \end{array}$ est continue

et vérifie $h(x_0) \neq 0$.

Par définition de la continuité il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$B(x_0, \eta) \subset h^{-1}(B(h(x_0), |h(x_0)|)).$$

Par définition de la densité

$$B(x_0, \eta) \cap A' \neq \emptyset$$

Soit $x' \in B(x_0, \eta) \cap A'$. On a $h(x') \in B(h(x_0), |h(x_0)|)$
Donc $h(x') \neq 0$ Mais $x' \in A'$. Donc $f|_{A'} \neq g|_{A'}$ □

Exemple 1

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Si $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est continue

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}|_{\mathbb{Q}} = 1_{|\mathbb{Q}}$$

↑ fonction constante de valeur 1 sur ℝ

Donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}|_{\mathbb{R}} = 1$ absurde! ↯

Donc $1_{|\mathbb{Q}}$ <u>n'est pas</u> continue.

<u>Exemple 2</u>

Soit
$$\acute{e}v_0 : \begin{array}{ccc} (C([0,1],\mathbb{K}),\|\cdot\|_p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(0) \end{array}$$

Si $p \in [1,\infty[$ on a vu que $H = \mathrm{Ker}(\acute{e}v_0)$ est dense dans $(C([0,1],\mathbb{K}),\|\cdot\|_p)$. On a

$$\acute{e}v_0|_H = 0_{|H}$$

↑ constante nulle

Donc par la même raison que ci-dessus la forme linéaire $\acute{e}v_0$ <u>n'est pas</u> continue.

<u>Exemple 3</u>

pas fait en cours

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue t.q.

$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x)\,f(y)$

Alors $f(0)f(0) = f(0) \implies f(0) = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \qquad f(n) = (f(1))^n$

Si $n \in \mathbb{N} \qquad f(-n)\,f(n) = f(0) = 1 \implies f(-n) = (f(1))^{-n}$

Si $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \qquad f\left(\frac{p}{q}\right)^q = f(1)^{p}$

Comme
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^q \end{array}$$
est bijective

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{p/q}$$

Pas fait en cours

Donc $\forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = f(1)^x = \exp(\sqrt{\log(f(1))\,x})$

Les deux applications sont continues et coïncident sur $\mathbb{Q}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (f(1))^x$.

8.4. Homéomorphismes

Définition

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$.

Soit $f : A \to B$ une application.

- On dit que f est continue ssi l'application induite
$$\begin{aligned} A &\to F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$
est continue.
- On dit que f est un homéomorphisme ssi $f : A \to B$ bijective, continue et $f^{-1} : B \to A$ continue.

Exemple 1

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors $f : I \to f(I)$ est un homéomorphisme (Théorème I.5.5.3). ~~En particulier~~

Cas particulier:
$$\tan : \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \tan x$$
est un homéomorphisme.

Exemple 2

Soit $(E, \|.\|_E)$ $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$, $B \subset F$ et $C \subset G$. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ des applications. Si f et g sont des homéomorphismes, $g \circ f$ aussi.

Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\|.\|$ et $\|.\|'$ des normes sur E. Alors $id_E : (E, \| \|) \longrightarrow (E, \|.\|')$ est un homéomorphisme ssi $\|.\|$ est équivalent à $\|.\|'$.

Preuve

- Déjà vu

Si ($\|.\|$ plus fine que $\|.\|'$). Alors $Id_E : (E, \|.\|) \longrightarrow (E^*, \|.\|')$ est continue.

Donc si $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes alors Id_E est un homéomorphisme.

- Il reste à montrer que si

$$Id_E : (E, \|.\|) \longrightarrow (E', \|.\|') \text{ est continue,}$$

alors $\|.\|$ est plus fine que $\|.\|'$. Mais si Id_E est continue alors il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$B_{\|.\|}(0, \eta) \subset B_{\|.\|'}(0, 1)$$

d'où

$$B_{\|.\|}(0,1) \subset \frac{1}{\eta} B_{\|.\|'}(0,1)$$

donc $\|.\|$ est plus fine que $\|.\|'$. □

Définition

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. On dit que A est homéomorphe à B ssi il existe un homéomorphisme $f : A \to B$.

NB

Si A est homéomorphe à B et si
B ______________________ C

Alors A est homéomorphe à C.

Exemple]

$[-1, 1]$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$. En effet si $\phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ est continue, l'image est un segment (Théorème I.5.5.2)

Proposition

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés, soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $f : A \to B$ une bijection.
Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un homéomorphisme

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A et tout ℓ de A

$$\left(u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell \quad \text{par } \|.\|_E \right) \Leftrightarrow \left(f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\ell) \quad \text{pour } \|.\|_F \right)$$

Proposition

Soit $(E, \|.\|_E)$, $(E', \|.\|_{E'})$, $(F, \|.\|_F)$ et $(F', \|.\|_{F'})$ des espaces vectoriels normés

Soit $A \subset E$, $A' \subset E'$, $B \subset F$, $B' \subset F'$

Soit $\phi : A' \to A$ un homéomorphisme

$\psi : B \to B'$ un homéomorphisme

Alors $f : A \to B$ est continue

ssi $\psi \circ f \circ \phi : A' \to B'$ est continue.

Preuve

Si f est continue, alors $\psi \circ f \circ \phi$ est continue par composition des applications continues. et $f = \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi \circ \phi^{-1}$ $\square$

8.5. Continuité uniforme

Définition

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés et soit $A \subset E$ une application $f : A \to F$ est dite uniformément continue ssi

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \underset{\uparrow}{\eta} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x, y \in A \quad \|x-y\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

ne dépend que de ε.

NB

f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ continue mais pas uniformément continue.

En effet $\forall n \in \mathbb{N}$ ~~$x+$~~ $(n+\eta)^2 - n^2 \geq 2\eta n$

Donc $\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x, y \in \mathbb{R} \quad |x-y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq 1$

Proposition

Si f est k-lipschitzienne, elle est uniformément continue.

Rappel:

Théorème (Heine)

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Définition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

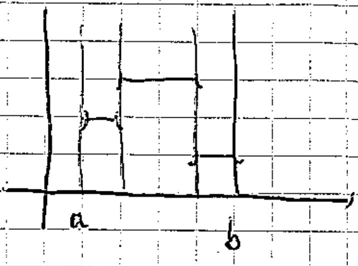
- Une subdivision de $[a,b]$ est une famille $(a_i)_{0 \le i \le n}$ d'éléments de $[a,b]$ t.q.

1/ $a_0 = a$ et $a_n = b$

2/ $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ $a_i < a_{i+1}$

- Une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier sur $[a,b)$ ssi il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \le i \le n}$ de $[a,b]$ t.q. pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ f est constante sur $]a_i, a_{i+1}[$

Dessin



Corollaire

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$ Toute fonction $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions en escalier (limite pour la norme $\|.\|_\infty$)

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f\left(a + \left[\frac{x-a}{b-a} n\right] \frac{b-a}{n}\right) & n>0 \\ f(a) & n=0 \end{cases} \end{array}$$

Si ~~$n=0$~~ f_0 est constante

Si $n>0$, posons $a_k = a + \frac{b-a}{n} k$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$

$(a_k)_{0 \le k \le n}$ est une subdivision de $[a,b]$

et $f_n|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est constante de valeur $f(a_k)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est une fonction en escalier.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

f est uniformément continue donc il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$\forall x, y \in [a,b] \quad |x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Soit $N = \left[\frac{b-a}{\eta}\right] + 1 \geqslant 1$

Si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $n \geqslant N$, on définit a_k comme ci-dessus.

On a $n > \frac{b-a}{\eta}$ donc $\eta > \frac{b-a}{n}$

$$\forall k \in \{0,\dots,n\} \quad \forall x \in [a,b] \quad a_k \leq x < a_k + \frac{b-a}{n}$$

$$\Rightarrow |a_k - x| < \eta \Rightarrow |f(a_k) - f(x)| < \varepsilon$$

Mais si $a_k \leq x \leq a_k + \frac{b-a}{n}$, $k \leq \frac{x-a}{b-a} n < k+1$

donc

$$\cancel{E}\left[\!\left[\frac{x-a}{b-a} n\right]\!\right] = k$$

donc

$$f_n(y) = f(a_k)$$

donc

$$\forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

8.6. Continuité des applications linéaires

Théorème

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) f est continue

(ii) f est continue en 0

(iii) f est bornée sur la boule $\mathcal{B}_{\|\ \|_E}(0,1)$

(iv) $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$

(v) $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x, y \in E \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq M \|x - y\|_E$

(vi) f est lipschitzienne

(vii) f est uniformément continue.

~~(i) $\Rightarrow$~~

Preuve

(i) $\Rightarrow$ (ii) par définition de la continuité

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $f(\mathcal{B}_E(0,\eta)) \subset \mathcal{B}_F(0,1)$

Mais alors
$$\frac{1}{\eta} f(\mathcal{B}_E(0,\eta)) \subset \frac{1}{\eta} \mathcal{B}_F(0,1)$$

i.e.
$$f(\mathcal{B}_E(0,1)) \subset \mathcal{B}_F\left(0, \frac{1}{\eta}\right)$$

et $f(\mathcal{B}_E(0,1))$ est bornée.

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

$\{\|f(x)\|_F : x \in \mathcal{B}_E(0,1)\}$ est bornée.

Soit M un majorant

$\forall x \in \mathcal{B}_E(0,1) \qquad \|f(x)\|_F \leq M$

Soit $x \in E$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{x}{\|x\|_E + \varepsilon} \in \mathcal{B}(0,1)$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|_E + \varepsilon}\right)\right\|_F \leq M$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \|f(x)\|_F \leq M(\|x\|_E + \varepsilon)$

donc $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

(iv) ⇒ (v) : on applique (iv) à $x - y$.

(v) ⇒ (vi) : définition lipschitzienne

(vi) ⇒ (vii) continuité uniforme des applications lipschitziennes

(vii) ⇒ (i) remarque dans 8.5.

Définition

- On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des fonctions linéaires continues de E dans F.
- Si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$

$$|||f||| = \sup_{x \in B_E(0,1)} \|f(x)\|_F$$

Remarque 1

Bien défini puisque si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ alors $f(B_E(0,1))$ est bornée.

Remarque 2

$\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\ell(E, F)$

cours 13 (applications linéaires de $E \to F$).

cours 14

Proposition 1

Soit $E \neq \cancel{0}\{0\}$ On a

$$|||f||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_{\cancel{E}F}}{\|x\|_E} = \sup_{\{x \in S_E(0,1)\}} \|f(x)\|_F$$

$$\{x \in S_E(0,1)\} = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$$

Preuve

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E + \varepsilon} \leq |||f|||$$

donc

$$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq |||f||| \leq \sup_{x \in B_F(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$$\leq \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} ,$$

d'où la première égalité.

$$\sup_{\{x \in S_E(0,1)\}} \|f(x)\|_F = \sup_{\{x \in S_E(0,1)\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$$\leq \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F$$

$$\leq \sup_{x \in S_E(0,1)} \|f(x)\|_F . \quad \square$$

Exemple 1

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~une~~ une forme linéaire

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_1$.

On a

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad |\varphi(x_1, \dots, x_n)| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, |x_i|$$

$$\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \right) \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

donc φ est continue et $|||\varphi||| \leq \|(a_1, \dots, a_n)\|_\infty$

Soit i_0 t.q. $\max\limits_{1\le i\le n} |a_i| = |a_{i_0}|$

Alors $$|\varphi(\overbrace{0,\dots,0,\underset{\underset{i_0}{\uparrow}}{1},0,\dots 0}^{e_{i_0}})| = |a_{i_0}|$$

donc $$|\varphi(\overset{(e_{i_0})}{\cancel{0,\dots,0,1,0,\dots,0}})| = \max_{1\le i\le n} |a_i|$$

On a $e_{i_0} \in S(0,1)$ pour la norme $\|.\|_1$.

Donc $|||\varphi||| \geq \|(a_1,\dots,a_n)\|_\infty$, d'où

$$|||\varphi||| = \|(a_1,\dots,a_n)\|_\infty .$$

<u>Exemple 2</u>

$$H = \{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) : f(0)=0 \}$$

$$\|.\|_\infty : \begin{array}{l} H \to \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \end{array}$$ est une norme sur H.

Soit $$\varphi : \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_0^1 f \end{array}$$ forme linéaire

$\forall f \in H$ $\left|\int_0^1 f\right| \le \|f\|_\infty$ donc φ est continue

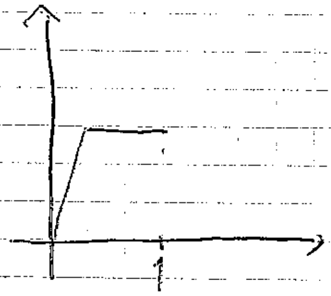
et $|||\varphi||| \le 1$.

Si on considère

$$f_n : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} (n+1)t & t\in[0,\frac{1}{n+1}] \\ 1 & t\in]\frac{1}{n+1},1] \end{cases} \end{array}$$

alors $f_n \in H$ (exo), $\|f_n\|_\infty = 1$ et

$$\int_0^1 f_n = 1 - \frac{1}{2(n+1)}.$$



Donc $|\varphi(f_n)| = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$ et $f_n \in S_H(0,1)$, donc

$$|||\varphi||| = 1.$$

Montrons qu'il n'existe pas $f \in S_H(0,1)$ t.q. $|\varphi(f)| = 1$.

En effet si $f \in S_H(0,1)$ alors $\forall x \in [0,1]$ $|f(x)| \leq 1$ et comme f est continue et $f(0) = 0$ il existe η t.q.
$\forall x \in [0,1]$ $\quad |x| < \eta \Rightarrow |f(x)| < 1/2$.

Soit
$$g : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in [0,\eta] \\ 1 & \text{si } t \in]\eta,1] \end{cases} \end{array}$$

g est une fonction en escalier t.q.
$\forall x \in [0,1]$ $\quad |f(x)| \leq g(x)$, donc

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 g(t)\,dt$$
$$= 1 - \eta/2 < 1.$$

~~Théorème~~

Exemple 3

On munit $C([0,1], \mathbb{K})$ ~~avec les~~ des normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_p$, $p \in [1, \infty[$.

Comme

$\|f\|_p =$ ~~$\sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p dt} \leq \|f\|_\infty$~~. $\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \|f\|_\infty$

~~D'autre part~~ Mais les normes $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes (voir exemple 7.6). Donc

$$\mathrm{id}_{\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_p} : \begin{array}{ccc} (C([0,1],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & C([0,1],\mathbb{K}, \|\cdot\|_p) \\ f & \longmapsto & f \end{array}$$

est continue alors que

$$\mathrm{id}_{\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_\infty} : \begin{array}{ccc} (C([0,1],\mathbb{K}), \|\cdot\|_p) & \longrightarrow & C([0,1],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) \\ g & \longmapsto & g \end{array}$$

ne l'est pas.

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé. Alors

$$\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$$

(i.e. toute application linéaire de E dans F est continue)

Preuve

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$ une base duale. Toutes les normes étant équivalentes sur E, on peut supposer que E est muni de la norme

$$\|\cdot\|_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} |e_i^\vee(x)| \end{array}$$

~~(de quelle)~~ ~~(Ex: c'est une norme)~~

Alors ~~pour~~ pour tout x de E on a

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_F &= \|f(\sum_{i=1}^{n} e_i^\vee(x)\, e_i)\|_F \\ &= \|\sum_{i=1}^{n} e_i^\vee(x)\, f(e_i)\|_F \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |e_i^\vee(x)|\, \|f(e_i)\|_F \\ &\leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \|f(e_i)\|_F\right) \|x\|_E . \end{aligned}$$

□

Proposition

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie non nul et soit $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Par le théorème qui précède elle est continue. Alors

$$|||f||| = \max_{x \in S_E(0,1)} \|f(x)\|_F = \max_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Autrement dit, le sup est atteint dans ce cas.

Preuve

Il suffit de montrer que le ~~max~~ sup est atteint sur $S_E(0,1)$.

$|||f||| = \sup_{x \in S_E(0,1)} \|f(x)\|_F$ le plus petit majorant,
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in S_E(0,1)$
t.q.

$$|||f||| \geq \|f(x_n)\|_F \geq |||f||| - \frac{1}{n+1}$$

Comme E est de dimension finie et $S_E(0,1)$ bornée, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence ℓ.
Donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q.

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$$

Comme $\|.\|_E$ est continue

$$1 = \|x_{\varphi(n)}\|_E \xrightarrow[n \to \infty]{} \|\ell\|_E$$

Donc $\ell \in S_E(0,1)$ et f est continue, $\|.\|_F$ continue sur F donc

$$\begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \|f(x)\|_F \end{array} \text{ est continue.}$$

Donc
$$\|f(x_{\varphi(n)})\|_F \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f(e)\|_F$$

Mais
$$\|f(x_{\varphi(n)})\|_F \xrightarrow[n\to\infty]{} |||f|||$$

donc
$$\|f(e)\|_F = |||f|||. \qquad \square$$

Théorème

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Alors

$|||\cdot||| : \mathcal{L}_c(E,F) \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Preuve

1) Si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|||\lambda f||| = \sup_{x \in B_E(0,1)} \|\lambda f(x)\|_F = \sup_{x \in B_E(0,1)} |\lambda|\,\|f(x)\|$$
$$= |\lambda|\,|||f|||.$$

2) $|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$

Car $\forall x \in E \quad \|(f+g)(x)\|_F \leq |||f|||\,\|x\|_E + |||g|||\,\|x\|_E$

3) Si $|||f||| = 0$

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \frac{\|f(x)\|_E}{\|x\|_E} = 0$$

donc
$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad f(x) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f = 0. \qquad \square$$

Proposition

Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces vectoriels normés.

Si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et

$$|||g \circ f||| \leq |||g|||\,|||f|||.$$

Preuve

- La composée d'applications continues est continue.
- $\forall x \in E \quad \|g \circ f(x)\|_G \leq |||g|||\,\|f(x)\|_F \leq |||g|||\,|||f|||\,\|x\|_E.$

Définition (algèbre)

Une algèbre sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-~~ev~~ espace vectoriel muni d'une loi

$$\circ : \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (A,B) \to A \circ B \end{array}$$

t.q.

$\forall A,B,C \in E$

1) $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$

$\forall A,B,C \in E$

2) $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$; $(A+B) \circ C = A \circ C + B \circ C$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall A,B \in E$

3) $\alpha\beta(A \circ B) = (\alpha A) \circ (\beta B)$.

Elle est ~~commutative~~ commutative si $\forall A,B \in E \quad A \circ B = B \circ A$

~~Corollaire~~

Corollaire

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. Alors

$\mathcal{L}_c(E) := (\mathcal{L}_c(E,E), +, \circ)$ composition

est une algèbre (non commutative si $\dim E \neq 1$) sur $\mathbb{R}$ et

$|||.||| : \mathcal{L}_c(E) \to \mathbb{R}_+$ une norme t.q.

$$\forall f,g \in \mathcal{L}_c(E) \quad |||g \circ f||| \leq |||g|||\,|||f|||.$$

Exemple

On a un isomorphisme d'algèbres (non commutatives) sur $\mathbb{R}$

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$$

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \longmapsto \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_i)_{1\le i\le n} \longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\right)_{1\le i\le n}\end{array}\right)$$

On fixe $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme. On peut alors définir

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad |||A||| = |||\underbrace{\varphi(A)}_{\in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)}|||$$

$|||.||| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ est une norme t.q.

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad |||A\cdot B||| \le |||A|||\cdot|||B|||$$

NB Attention : Cette norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dépend du choix de $\|.\|$. Par contre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Donc les différentes normes $|||.|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes.

Proposition

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$\Updownarrow$ (i) f est continue

(ii) $\forall x \in E \setminus \mathrm{Ker}(f) \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ B(x,\eta) \cap \mathrm{Ker} f = \emptyset$.

Preuve

(i) ⇒ (ii)

$\forall x \in E \setminus \mathrm{Ker}(f)\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*\ f(B(x,\eta)) \subset B(f(x), |f(x)|)$

donc $\forall x \in E \setminus \mathrm{Ker}(f)\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*\ \mathrm{Ker} f \cap B(x,\eta) = \emptyset$.

(ii) ⇒ (i)

Si $f = 0$ f est continue.

Sinon soit $a \in E \setminus \mathrm{Ker}(f)$

$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*\ \mathrm{Ker}(f) \cap B(a,\eta) = \emptyset$. Soit $y \in B(0,\eta)$ t.q. $f(y) \neq 0$. $a+y \in B(a,\eta)$ et $a-y \in B(a,\eta)$

donc $f(a+y) \neq 0$ et $f(a-y) \neq 0$ donc $f(y) \neq f(a)$ et $f(y) \neq -f(a)$.

Donc $\forall y \in B(0,\eta)\ |f(y)| \neq |f(a)|$

Mais si $z \in B(0,\eta)$ vérifie $|f(z)| > |f(a)|$

alors
$$f\Big(\underbrace{z\frac{|f(a)|}{|f(z)|}}_{\in B(0,\eta)}\Big) = |f(a)|$$

Donc
$$\forall y \in B(0,\eta)\ |f(y)| < |f(a)|$$

et f est continue. □

Cours 14