Cours 1

Chapitre 1

Vendredi 11/09
pas de Topologie
2 séances d'algèbre

Préliminaires sur $\mathbb{R}$

Mardi 07/10
14h - 15h30 : Cours de Topologie

1 Les nombres réels

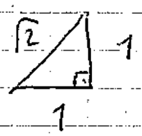
1.1. Remarques préliminaires

6^e s. av. J.-C. nombres naturels $\mathbb{N}$

nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$

nombres rationnels $\mathbb{Q}$: $px + q = 0$; $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$.

Pythagore



$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Construction exacte des nombres réels ~ 1870.

1.2. Axiomes de corps

$$+ : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) \longmapsto a+b \end{array} \qquad / \qquad \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) \longmapsto a \cdot b \end{array}$$

(addition) (multiplication)

(A1)	$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$	$a+(b+c) = (a+b)+c$	(associativité)
(A2)	$\exists\, 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}$	$a+0 = a$	(élément neutre)
(A3)	$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists -a \in \mathbb{R}$	$a+(-a) = 0$	(élément opposé)
(A4)	$\forall a,b \in \mathbb{R}$	$a+b = b+a$	(commutativité)
(A5)	$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$	$(ab)c = a(bc)$	(associativité)
(A6)	$\exists\, 1 \neq 0\ \forall a \in \mathbb{R}$	$a \cdot 1 = a$	(élément neutre)
(A7)	$\forall a \neq 0\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$	$a \cdot a^{-1} = 1$	(élément inverse)
(A8)	$\forall a,b \in \mathbb{R}$	$ab = ba$	(commutativité)
(A9)	$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$	$a(b+c) = ab+ac$	(distributivité)

Remarque

1) (A1) – (A9) expriment le fait que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif

2) L'élément neutre (add., mult.) et les éléments opposé, inverse sont uniques.

Preuve

Soit $0'$ un autre élément neutre pour l'addition, alors

$$0 \overset{(A2)}{=} 0+0' \overset{(A4)}{=} 0'+0 \overset{(A2)}{=} 0'$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\cancel{(-a)}$ a' et a'' deux éléments opposés pour a. On a

$$a' \overset{(A2)}{=} a' + 0 \overset{(A1),(A3)}{=} a' + (a + a'') \overset{(A4)}{=} a + a' + a'' \overset{(A3)}{=} 0 + a'' \overset{(A3),(A4)}{=} a''$$

1.3. Axiomes d'ordre

Il existe une ~~sous-ensemble~~ partie P de $\mathbb{R}$, appelée l'ensemble des nombres positifs t.q.

(A10) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ une et seulement une des trois propriétés suivantes est ~~vérifiée~~ satisfaite

$a \in P$ ou $-a \in P$ ou $a = 0$

(A11) $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$

(A12) $a, b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$

Remarque

Si $a \in P$ on dit que a est positif, si $-a \in P$ on dit que a est négatif

$a > b :\Leftrightarrow a - b \in P$; $a \geq b :\Leftrightarrow a > b$ ou $a = b$

Loi de trichotomie

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ une et seulement une des trois propriétés suivantes est ~~vérifiée~~ satisfaite

$a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.

1.4. Majorants, minorants, ~~maximum~~, ~~minimum~~, borne supérieure, borne inférieure

Notations

- $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$

  $A \leq \xi$: $\forall a \in A \quad a \leq \xi$

  $A \leq B$: $\forall a \in A, b \in B \quad a \leq b$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si

  $\exists \xi \quad A \leq \xi$: A est majorée et ξ est majorant de A

  $\exists \xi \quad \xi \leq A$: A est minorée et ξ est minorant de A

- Si A est majorée et minorée on dit que A est bornée
- Si ξ est majorant de A et $\xi \in A$, alors on appelle ξ le ~~minimum~~ maximum de A et on note

  $\xi = \max(A)$. plus grand élément

  Si ξ est minorant et $\xi \in A$, alors on appelle ξ le plus petit élément ~~minimum~~ de A et on note $\xi = \min(A)$.

- Si l'ensemble des majorants de $A \neq \emptyset$ admet un plus petit élément, cet élément est appelé borne supérieure de A et noté $\sup(A)$

  Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, cet élément est appelé borne inférieure de A et noté $\inf(A)$.

Remarque

1) Si $\max(A)$ ($\min(A)$) existe, alors il est unique.
2) Si $\eta = \max(A)$, alors $\eta = \sup(A)$. Si $\eta = \sup(A) \in A$, alors $\eta = \max(A)$. Des propriétés analogues sont vérifiées pour $\min(A)$, $\inf(A)$.

3) P est minorée, mais pas majorée. On a $\inf(P) = 0$, mais P ~~ne possède~~ n'admet pas de ~~minimum~~ plus petit élément (exercice !).

1.5. La complétude de $\mathbb{R}$

(A13) Toute ~~sous-ensemble~~ partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet ~~possède~~ une borne supérieure

Remarque

1) Les axiomes (A1) − (A13) définissent les nombres réels.

2) Nous verrons plus tard que (A13) est équivalent au fait que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ possède une limite dans $\mathbb{R}$.

(3) A la fin du cours nous allons construire les nombres réels en complétant $\mathbb{Q}$.)

1.6. Signe et valeur absolue

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit :

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

le signe de a. La valeur absolue de a est définie par

$$|a| = a \operatorname{sgn} a = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Inégalité du triangle

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|, \text{ conséquence : } \big||a| - |b|\big| \leq |a-b|}$$

Preuve

Note que $(a<b$ et $c<d) \Rightarrow a+c < b+d$ (1)

On a :

$$\pm a \leq |a| \quad \text{et} \quad \pm b \leq |b| \text{ et donc}$$

$$a+b \leq |a|+|b| \quad \text{et} \quad -(a+b) \leq |a|+|b|,$$

c. a. d. l'inégalité du triangle est vérifiée.

Utilisant cette inégalité on obtient :

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|,$$

$$|b| = |b-a+a| \leq |a-b| + |a|,$$

c.a.d. $\pm(|a|-|b|) \leq |a-b|$ $\square$

1.7. Intervalles, voisinages, ensembles ouverts et fermés

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervalle fermé

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervalle ouvert

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ intervalle fermé

$]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ intervalle ouvert

$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ intervalle fermé

$]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ intervalle ouvert

$]-\infty,\infty[:= \mathbb{R}$ ouvert et fermé

- $B_\varepsilon(a) :=]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$: ε - voisinage de a
- U est un voisinage de a si $\exists \varepsilon>0$ $B_\varepsilon(a) \subset U$.
- Soit $M \subset \mathbb{R}$
  - On appelle a un point intérieur de M si M est un voisinage de a, c.a.d. s'il existe $\varepsilon>0$ t.q. $B_\varepsilon(a) \subset M$.
  - On appelle a un point de la frontière de M s'il est ni point intérieur de M ni de $\mathbb{R}\setminus M$.

- M est un ensemble ouvert s'il ne contient que des points intérieurs. M est un ensemble fermé si $\mathbb{R} \setminus M$ est ouvert.

2 Les nombres naturels

2.1. Définition des nombres naturels

Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}$ est appelé un ensemble inductif si:

(a) $0 \in M$ et (b) $x \in M \Rightarrow x+1 \in M$.

L'intersection de tous les ensembles inductifs est appelé l'ensemble des nombres naturels

$$\boxed{\mathbb{N} = \bigcap \{ M \subset \mathbb{R} : M \text{ inductif} \}}$$

Exercice : $\mathbb{N}$ est inductif.

Principe de récurrence

Soit $M \subset \mathbb{N}$ avec les propriétés suivantes :

(a) $0 \in M$ et (b) $x \in M \Rightarrow x+1 \in M$,

alors $M = \mathbb{N}$.

Preuve par récurrence

On montre que les nombres $n \in \mathbb{N}$ pour qui $A(n)$ est satisfaite ~~vérifiée~~ forment un ensemble inductif.

(a) Il faut montrer $A(0)$.

(b) On suppose $A(n)$ et il faut montrer $A(n+1)$.

Proposition

Toute partie non vide des nombres naturels admet un plus petit élément.

admis.

(cours)

2.2. La propriété archimédienne des nombres réels

Théorème

L'ensemble des nombres naturels n'est pas majoré.

Preuve.

Supposons que $\mathbb{N}$ soit majoré. Alors il existe $y = \sup \mathbb{N}$ ((A13)!) et $y-1$ n'est pas un majorant pour $\mathbb{N}$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ avec $y-1 < n$ et donc $y < n+1 \in \mathbb{N}$ en contradiction avec la définition de y. $\square$

Corollaire (Archimède, Eudoxe)

Pour tout $a, b \in P$ il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $na > b$. On dit le corps (totalement ordonné) des nombres réels est archimédien.

En particulier : pour tout nombre réel positif il existe un nombre naturel n avec $\frac{1}{n} < a$.

Autrement dit : si $a \geq 0$ et $a \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $a = 0$.

Preuve

Si $na \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $n \leq \frac{b}{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui contredit le théorème. La deuxième partie est le cas particulier $b = 1$. $\square$

2.3 Nombres entiers relatifs et nombres rationnels

- Un nombre x est appelé nombre entier relatif si x ou $-x$ est un nombre naturel, on note $x \in \mathbb{Z}$
- si x est solution de $qx = p$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, alors $x = \frac{p}{q}$ est appelé nombre rationnel, ~~on note $x \in \mathbb{Q}$.~~

sinon nombre irrationnel

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Théorème

(i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire (i.e. ~~c.a.d.~~ avec élément neutre de la multiplication), c.a.d. les axiomes (A1) – (A9) à l'exception de (A7) sont satisfaits pour les éléments de $\mathbb{Z}$.

(ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps commutatif, c.a.d. les axiomes (A1) – (A9) sont satisfaits pour $\mathbb{Q}$.

Remarque

$\mathbb{Q}$ n'est pas complet, c.a.d. (A 13) n'est pas satisfait pour $\mathbb{Q}$.

Lemme

Toute partie non vide majorée (minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand (plus petit) élément.

Preuve

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$. Soit $M \in \mathbb{N}$ un majorant de A.

Alors $\forall a \in A \quad a \leq M$ i.e. $M - a \in \mathbb{N}$

$\{M - a \,;\, a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément m (Proposition 2.1). On a

$m = M - a_0$ avec $a_0 \in A$ et $\forall a \in A \quad m \leq M - a$

Donc $\forall a \in A \quad M - a_0 \leq M - a \Leftrightarrow \forall a \in A \quad a \leq a_0$

et $a_0 \in A$ est un majorant ~~pour~~ de A.

La preuve pour A minorée est analogue. □

2.4. Ensembles dénombrables

Notation : $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$

$A \sim B$: $\exists$ bijection $f : A \to B$

- On dit que M est un ensemble fini ~~si $M \sim$~~ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $M \sim \mathbb{N}_n$.

On dit que M est dénombrable si $M \sim \mathbb{N}$

On dit que M est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

Lemme

Toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand et un plus petit élément.

Preuve par récurrence (exercice)

Théorème

$\mathbb{Q}$ est dénombrable

admis

3 Suites réelles

3.1 Définitions

- Une application $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est appelée une suite réelle.
- ~~$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $C>0$ t.q. $|u_n| \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$~~
- une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ~~$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est~~ croissante (décroissante) si $u_{n+1} \geq u_n$ $(\leq)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- ~~$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$~~ est monotone si elle est croissante ou décroissante
- strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante
- majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq M$
- minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq m$
- bornée si elle est majorée et minorée

En cas d'inégalité stricte on parle de strictement croissante (strictement décroissante).

3.2. Suites convergentes

Définition

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>convergente</u> s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad |u_n - \ell| < \varepsilon. \qquad (C)$$

Dans ce cas on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et que l est sa limite. On écrit

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ ou $u_n \to l,\ n \to \infty$. ← à comparer à d'autres cours

{On dit qu'une suite diverge si elle ne converge vers aucun réel}

Remarque

(C) signifie que pour presque tout $n \in \mathbb{N}$ (tout $n \in \mathbb{N}$ sauf nombre fini) $u_n \in B_\varepsilon(l)$.

Théorème

$\boxed{\text{Toute suite convergente est bornée et sa limite est unique}}$

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite l.

$\exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| < 1 \implies \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N$

$\cancel{-1 < |u_n| < 1+|l|}$ $\quad \cancel{|u_n| < 1+|l|}$ $\quad l-1 \leq u_n \leq 1+l$

Donc $(u_n)_{n\geq N}$ est bornée. L'ensemble $\{u_n : n < N\}$ est fini et possède donc un plus grand ~~et un plus~~ élément M et un plus petit élément m. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\min\{m, l-1\} \leq u_n \leq \max\{M, l+1\}$

~~$\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leq \max\{1+|l|, |M|, |m|\}$~~.

Supposons ~~maintenant~~ que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux limites $l \neq l'$. Soit $\varepsilon := \frac{1}{2}|l-l'|$

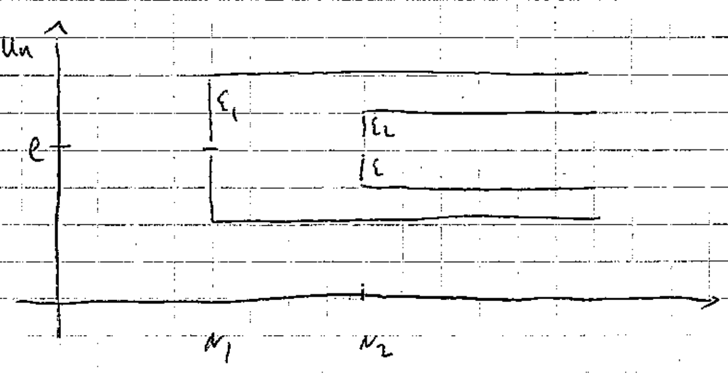
$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| < \varepsilon$

$\exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N' \quad |u_n - l'| < \varepsilon$.

Soit $N_0 = \max\{N, N'\}$. On a pour $n \geq N_0$:

$|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| < 2\varepsilon = |l-l'|$ ce qui est une contradiction. □

Dessin



Règles de calcul

Soit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = a+b$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = a\cdot b$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = a^p$, $p \in \mathbb{N}$

iii) $a_n \leq b_n$ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$, alors $a \leq b$.

Définition

$f : D \overset{\subset \mathbb{R}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ est lipschitzienne s'il existe $L > 0$ t.q.
$\forall x, y \in D \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

Lemme

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ et f lipschitzienne dans un voisinage U de u, alors
$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u).$$

Preuve

Notons d'abord que $f(u_n)$ est bien défini pour presque tout n puisque $u_n \in U$ pour presque tout n.
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - u| < \frac{\varepsilon}{L}$. Donc
$|f(u_n) - f(u)| \leq L|u_n - u| < \varepsilon$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(u)$.

Exercice : Montrer les règles de calcul (on pourra utiliser le lemme)

Théorème ~~des gendarmes~~ gendarmes (du sandwich)

Soit $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$ et $a_n \leq c_n \leq b_n$ pour presque tout n. Alors $\lim_{n\to\infty} c_n = \ell$

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse ~~pres~~ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et $b_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$. Alors on a $c_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$. □

3.3. Suites extraites

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Dessin u_0 u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 ...

~~Exemple La suite~~

NB

1) Une suite extraite est donc une composée d'applications : $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u\circ\varphi$ où $u : n \mapsto u_n$, $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$

2) La composée de deux applications strictement croissantes est croissante. Donc toute suite extraite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[En effet si $\forall n\in\mathbb{N}$ $v_n = u_{\varphi(n)}$

$\forall n\in\mathbb{N}$ $w_n = v_{\psi(n)}$

avec φ et ψ strictement croissantes alors

$w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))} = u_{\varphi\circ\psi(n)}$]

3/ Lemme

> Si $u_n \to \ell$, $n \to \infty$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $v_n \to \ell$, $n\to\infty$.

Preuve

En effet, il existe $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante t.q.
$\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad v_n = u_{\varphi(n)}$.
Comme $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad \varphi(n+1) \geq \varphi(n)+1$ on a $\forall n\in\mathbb{N}\ \varphi(n)\geq n$
Soit $\varepsilon>0$. Alors il existe $N\in\mathbb{N}$ $\forall n\geq N$ $\quad |u_n-\ell|<\varepsilon$
Si $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N$, alors $\varphi(n)\geq N$. Donc
$|u_{\varphi(n)}-\ell|<\varepsilon$ i.e. $|v_n-\ell|<\varepsilon$. □

Ex La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ car les suites extraites $((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $(-1)^{2n}\to 1$, $(-1)^{2n+1}\to -1$.

~~3.6. Critères de convergence pour des suites monotones~~

3.9. Limites infinies

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini si u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang, c.a.d.
$\forall A\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N \quad u_n\geq A.$
On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$; $u_n\to\infty$, $n\to\infty$

On définit de même une suite tendant vers $-\infty$:
$\forall A\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N \quad u_n\leq A$
On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$, $u_n\to-\infty$, $n\to-\infty$

Rq

> On peut considérer que (x_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, ma[is] sans cette précision, o[n] dit que (x_n) diverge.

conv
cour

Règles de calcul

(a) $a_n\to\infty \Rightarrow \lambda a_n\to\infty$ pour $\lambda>0$ et $\lambda a_n\to-\infty$, $\lambda<0$.

(b) $a_n\to\infty \Rightarrow \dfrac{1}{a_n}\to 0$. L'inverse est vrai si presque tous les a_n sont positifs.

(c) $a_n \to \infty$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$ (ou $b_n \to \infty$) $\Rightarrow a_n + b_n \to \infty$.

(d) $a_n \to \infty$, $b_n \to b > 0 \Rightarrow a_n b_n \to \infty$.

Preuve: Exercice

3.5. Critères de convergence pour des suites monotones

~~Critère de Monotonie~~

~~Une suite (u_n) monotone bornée est convergente et sa limite est égale à $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ si elle est croissante et égale à $\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ si elle est décroissante. Une suite ~~monotone~~ non bornée croissante resp. décroissante tend vers $+\infty$ resp. $-\infty$.~~

Théorème (Critère de monotonie)

Toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure. De même, toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.

Preuve

Soit (u_n) une suite croissante majorée. L'ensemble $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée : elle admet une borne supérieure ℓ. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E, il existe donc un entier N t.q. $\ell - \varepsilon \leq u_N \leq \ell$. La suite étant croissante :

$\forall n \geq N \quad \ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell$, donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

La suite converge vers ℓ. La preuve de la deuxième partie est analogue. $\square$

Théorème

Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Preuve: exercice

~~Théorème (Suites adjacentes)~~

Deux suites réelles sont dites adjacentes si

- l'une est croissante et l'autre décroissante
- leur différence tend vers 0

Théorème (suites adjacentes)

> Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite

Preuve

Supposons (x_n) croissante, (y_n) décroissante et $\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$.
La suite $(y_n - x_n)$ est décroissante et elle converge vers 0, elle est donc toujours positive : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_0 \leq x_n \leq y_n \leq y_0$

(x_n) est donc croissante majorée par y_0 : elle converge

(y_n) est décroissante minorée par x_0 : elle converge.

De $\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$, on déduit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. □

3.6 Valeurs d'adhérence

Définition

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la limite d'une suite extraite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

~~Théorème (Bolzano Weierstrass)~~ Ex $(-1)^n$ a les deux valeurs d'adhérence puisqu'at 1 et -1.

Proposition

> Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si
> $\forall \varepsilon > 0 \quad \{n \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| < \varepsilon\}$ est infini

Preuve

$\Rightarrow$ Supposons que ℓ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe φ strictement croissante telle que

$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N$ $|u_{\varphi(n)}-\ell|<\varepsilon$, donc $\{n\in\mathbb{N} : |u_{\varphi(n)}-\ell|<\varepsilon\}$ est infini. Mais $\{\varphi(n) : n\in\mathbb{N}, n\geq N\}$ est infini et donc $\{n\in\mathbb{N} : |u_n-\ell|<\varepsilon\}$ est infini

$\Leftarrow$ On suppose que $\forall\varepsilon>0$ $\{n\in\mathbb{N} : |u_n-\ell|<\varepsilon\}$ est infini. Nous allons construire par récurrence une application strictement croissante $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad |u_{\varphi(n)}-\ell| < \frac{1}{n+1}$

$\underline{n=0}$ $\quad \exists\, N_0\in\mathbb{N}$ $\quad |u_{N_0}-\ell|<1$. Soit $\varphi(0)=n_0$.

$\underline{n\to n+1}$ $\quad$ L'ensemble $\{n : |u_n-\ell|<\frac{1}{n+2}\}$ est infini, en particulier $\exists\, k_{n+1}$ t.q. $|u_{k_{n+1}}-\ell|<\frac{1}{n+2}$ et $k_{n+1}>\varphi(m)$ $\cancel{\forall m\leq n}$.

On pose définit $\varphi(n+1) := \cancel{\varphi(k_{n+1})} > k_{n+1} > \varphi(n)$.

φ est strictement croissante par définition et $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad |u_{\varphi(n)}-\ell| < \frac{1}{n+1}$, i.e. $u_{\varphi(n)}\to\ell$, $n\to\infty$. $\square$

Théorème (Bolzano-Weierstrass)

$\boxed{\text{Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.}}$

On va en fait montrer un résultat plus fin.

Proposition / Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et bornée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$\{u_m : m \in \mathbb{N},\ m \geq n\}$$

est borné et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_n = \sup\{u_m : m \in \mathbb{N},\ m \geq n\} \\ b_n = \inf\{u_m : m \in \mathbb{N},\ m \geq n\} \end{cases}$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée,

donc elles convergent et on note

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ u_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ limite supérieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ u_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve

Soit A un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

B un minorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

A est un majorant de $\{u_m : m \in \mathbb{N},\ m \geq n\}$

et B " " minorant " "

et $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m \geq n \Rightarrow B \leq b_n \leq u_m \leq a_n \leq A$.

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$

a_n est un majorant de $\{u_m : m \in \mathbb{N},\ m \geq n+1\}$

b_n est un minorant de $\{u_m : m \in \mathbb{N},\ m \geq n+1\}$

donc $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$. $\square$

Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ~~Alors~~ bornée. Alors $\overline{\lim_{n\to\infty}} u_n$ et $\underline{\lim_{n\to\infty}} u_n$ sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à

$$[\underline{\lim_{n\to\infty}} u_n, \overline{\lim_{n\to\infty}} u_n]$$

Preuve

- Montrons que $S = \overline{\lim_{n\to\infty}} u_n$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$, a_n défini comme ci-dessus.

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ $|a_n - S| < \varepsilon/2$.

Mais $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \sup\{u_m : m \in \mathbb{N}\ m \geq n\}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n - \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de cet ensemble. Donc pour tout ~~entier~~ $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ $m \geq n$ t.q.

$a_n - \varepsilon/2 \leq u_m \leq a_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ $\exists m \geq n$ $|u_m - S| \leq |u_m - a_n| + |a_n - S| < \varepsilon$

Donc

$$\{m \in \mathbb{N} : |u_m - S| < \varepsilon\} \text{ est infini.}$$

- De même on montre que $\underline{\lim}\, u_n$ est une valeur d'adhérence.
- Si ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Mais $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \leq u_{\varphi(n)} \leq a_n$, ~~donc~~ d'où

$$\underline{\lim}\, u_n \leq \ell \leq \overline{\lim}\, u_n \qquad \square$$

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une seule valeur d'adhérence.

(iii) $\underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$.

Dans ce cas on a $\ell = \overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n$.

Preuve

(i) ⇒ (ii) déjà vu

(ii) ⇒ (iii) : par le théorème

(iii) ⇒ (i) :

Notons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies comme ci-dessus et posons $\ell = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \quad a_n < \ell+\varepsilon,\ b_n > \ell-\varepsilon$.

Mais $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \quad \ell-\varepsilon < b_n \leq u_n \leq a_n < \ell+\varepsilon$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$. ◻

3. ~~II.~~ (Complétude II) Suites de Cauchy

Définition

On dit ~~que (u_n)~~ qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ssi

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall p,q\in\mathbb{N}\ p\geq N$ et $q\geq N \quad |u_p - u_q| < \varepsilon$

Théorème (Critère de convergence de Cauchy)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi elle est de Cauchy.

Preuve

- Nécessaire. Soit $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$

$$|u_n - \ell| < \varepsilon/2.$$ Donc

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N \quad |u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| < \varepsilon$.

- Suffisant. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

On montre d'abord que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

$\exists N \in \mathbb{N}, N \geq 1\ \forall m, n \geq N \quad |u_m - u_n| < 1$, en particulier

$\forall m \geq N \quad |u_m - u_N| < 1 \Rightarrow \{u_m : m \geq N\}$ est

borné. Comme $\{u_m : m < N\}$ est fini il suit que

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence ℓ.

On va montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N > 0$

t.q.

$$|u_n - u_m| < \varepsilon/2 \quad \forall m, n \geq N.$$

Comme dans chaque voisinage de ℓ on a un nombre infini de u_n il existe $k \geq N$ avec $|u_k - \ell| < \varepsilon/2$.

Donc pour $n \geq N$

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_k| + |u_k - \ell| < \varepsilon. \qquad \square$$

Remarque (importante!)

Le fait que toute suite de Cauchy converge est équivalent à (A 15)!
La complétude de $\mathbb{R}$ est souvent définie à l'aide des suites de Cauchy.

Proposition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) M est une borne supérieure de A

(ii) M est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A t.q.
$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M$$

Preuve

"$\Rightarrow$" M est un majorant par définition. M est le plus petit des majorants donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n \in A$ t.q.
$M - \frac{1}{n+1} \le a_n \le M$. Donc $a_n \to M$.

"$\Leftarrow$" Soit M' un majorant de A. Si $M' < M$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que ~~$M - a_N < M - P$~~ $M' < a_N \le M$. Or $a_N \in A$ ceci contredit le fait que M' soit un majorant de A, donc $M' \geq M$. $\square$

Théorème des segments emboîtés

Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite de segments emboîtés (c.à.d. $I_{n+1} \subset I_n$) dont l'amplitude $(b_n - a_n)$ converge vers 0.
L'intersection est un singleton.

Preuve

Il suffit de remarquer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers un même réel ℓ.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le \ell \le b_n$, donc $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Si ℓ' est un élément quelconque de cette intersection, on a
$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n - a_n \geq |\ell - \ell'|$ d'où $\ell = \ell'$. $\square$

cours 3

4 Séries numériques

4.1. Définitions

Une série réelle de terme général x_n est formellement le couple $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donné par les deux suites réelles et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

~~La suite La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$~~

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi appelée la "suite des sommes partielles" puisqu'à un indice n donné, S_n fait correspondre la somme des $n+1$ premiers termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

~~On note la série de terme général~~ x_n : $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ou $\sum_{n\geq 0} x_n$.

Zénon d'Elée

Achille et la tortue héro de la guerre de Troie

Sa mère le plonge dans le Styx (fleuve)

$T = 10 + 0{,}1 + \cdots$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10}{100^n} = \frac{10}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1000}{99} = 10{,}\overline{10}$$

4 Séries numériques — Paradoxe de Zénon

4.1. Définitions

Une série réelle de terme général x_n est formellement le couple formé par les deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout entier naturel n,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k .$$

On note la série de terme général x_n $\sum x_n$ ou $\sum_{n\geq 0} x_n$

La série est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite S est alors appelée somme de la série, elle est notée $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$. Dans le cas contraire, la série est dite divergente.

~~Théor~~

Exemple (série géométrique)

$$x_n := q^n, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k ; \quad |q| < 1$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$q S_n = 0 + q + q^2 + \dots + q^{\cancel{n+1}} + q^{n+1}$$

$$(1-q) S_n = 1 - q^{n+1} \overset{|q|<1}{\Longrightarrow} S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{|q|<1} \frac{1}{1-q}, \quad n \to \infty$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Exercice : Montrer la formule pour S_n par récurrence.

Théorème

> Supposons que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ converge. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$ convergent vers 0.

Preuve
Soit S la limite de la série, $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$
Si $\lim a_n = \lim v_n = S$, alors (d'après les règles de calcul pour les limites de suites) $a_n - v_n$ converge vers 0.
$a_n = S_n$, $v_n = S_{n-1}$ donne $x_n \to 0$, $n \to \infty$
$a_n = S$, $v_n = S_n$ donne $r_n \to 0$, $n \to \infty$. □

4.2. Séries ~~avec~~ de terme général positif

Théorème

Une série $\sum x_n$ ~~avec~~ dès de termes général ~~non négatifs~~ aux positifs (i.e. $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$) est convergente si la suite de ses sommes partielles est majorée. Sinon elle tend vers l'infini

Preuve
Il suffit de constater que $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ est croissante et d'appliquer les théorèmes de la section 3.5. □

Théorème (Règles de comparaison)

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries ~~avec~~ de termes généraux ~~non négatifs~~ **positifs**
i) Si $a_n \leq b_n$ pour presque tout n et $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
ii) Si $b_n \leq a_n$ pour presque tout n et $\sum b_n$ diverge, alors $\sum a_n$ diverge également.

Preuve
(pourquoi !)
i) On peut supposer $b_n \geq a_n$ $\forall n$. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les sommes partielles. Dans le premier cas on a $A_n \leq B_n$, dans le deuxième $B_n \leq A_n$. On peut alors appliquer le théorème précédent.
□ /cour.

§.3. Convergence absolue

Définition

La série $\sum x_n$ converge absolument lorsque la série des valeurs absolues $\sum |x_n|$ converge.

Critères de convergence absolue

a) Si $|a_n| \le c_n$ pour presque tout n et $\sum c_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge absolument.

b) S'il existe q avec $0 < q < 1$ t.q.

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1 \text{ pour presque tout } n,$$

alors $\sum a_n$ converge absolument ~~est absolument convergente~~. Si

$$\{n : \sqrt[n]{|a_n|} \ge 1\} \text{ est infini, alors}$$

$\sum a_n$ diverge.

c) Si $a_n \neq 0$ et s'il existe $q \in (0,1)$ t.q.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1 \text{ pour presque tout } n,$$

alors $\sum a_n$ converge absolument. Si

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1 \text{ par presque tout } n, \text{ alors}$$

$\sum a_n$ diverge.

Preuve

$\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ entraîne $|a_n| \le q^n$. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ pour $n \ge p$, on a $|a_{p+n}| \le C q^n$ avec $C := |a_p|$ (preuve par récurrence : exercice!). On applique alors les règles de comparaison avec la série géométrique. L'assertion sur la divergence est correcte parce que sous les hypothèses a_n ne converge pas vers 0. Dans le premier cas $|a_n| \ge 1$ pour un nombre infini d'indices, dans le deuxième cas on a $|a_p| \le |a_{p+1}| \le |a_{p+2}| \le \dots$ □

§ 4. Développements décimaux des nombres réels

$$0,10727272\ldots = \frac{1}{10} + \frac{7}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \ldots$$

Développement décimal : $z_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

$$Z, z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots := Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{10^n}, \quad Z \in \mathbb{N}.$$

Comme $0 \leq \frac{z_n}{10^n} \leq 9 \cdot \frac{1}{10^n}$ la série converge.

Il peut y avoir plusieurs développements décimaux d'un nombre réel. Par exemple

$1 = 1,0000\ldots = 0,9999\ldots$ puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1.$$

L'ambiguïté peut être enlevée de la façon suivante : on interdit soit $z_n = 9$ pour presque tout n, soit $z_n = 0$ pour presque tout n.

Le développement décimal est un cas particulier du développement g-adique. Soit g un nombre naturel $g \geq 2$ et $0 \leq a \in \mathbb{R}$. Si

$$a = Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} \quad \text{~~avec } Z \in \mathbb{N} \text{ et~~}$$

avec $Z \in \mathbb{N}$ et $z_n \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$, alors on écrit

$$a = Z, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

et on appelle $Z, z_1 z_2 z_3 \ldots$ le développement g-adique de a.

Si $a < 0$ et si $-a$ a le développement ci-dessus, alors on écrit $a = -Z, z_1 z_2 z_3 \ldots$. À cause de $0 \leq z_n g^{-n} < g\, 2^{-n}$ la série est convergente.

Théorème

> Soit g un nombre naturel ≥ 2. Tout nombre réel ~~non~~ **positif** ~~négatif~~ admet un développement g-adique. Ce développement est unique si l'on interdit soit "$z_n = g-1$ pour presque tout n" soit "$z_n = 0$ pour presque tout n".

Pour démontrer le théorème on aura besoin de la notion de partie entière. La partie entière d'un nombre ~~réelle~~ réel x est le plus grand nombre entier relatif $\leq x$. On le note $[x]$.

Preuve (Théorème)

Soit $a \geq 0$. On définit par récurrence

$$Z = [a], \qquad a_0 = a - Z$$

$$z_1 = [g a_0] \qquad a_1 = a - Z, \; z_1 = a_0 - z_1 g^{-1}$$

$$z_2 = [g^2 a_1] \qquad a_2 = a - Z, z_1 z_2 = a_1 - z_2 g^{-2}$$

$$\vdots$$

$$z_n = [g^n a_{n-1}] \qquad a_n = a - Z, z_1 \ldots z_n = a_{n-1} - z_n g^{-n}$$

Alors on a :

$$(*) \qquad 0 \leq a_n < g^{-n}, \quad a_n \geq a_{n+1}, \quad z_n \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$$

On va montrer (*) par récurrence utilisant que $0 \leq x - [x] < 1$.

(*) est évidemment vérifiée pour $n = 0$.

"$n \to n+1$" On a $0 \leq a_n < g^{-n} \Rightarrow 0 \leq g^{n+1} a_n < g$, donc

$$0 \leq [g^{n+1} a_n] = z_{n+1} < g$$

ainsi que

$$0 \leq g^{n+1} a_n - z_{n+1} < 1.$$

À cause de $a_{n+1} = a_n - z_{n+1} g^{-n-1}$ (*) suit aussi pour l'indice $n+1$.

De (*) suit $a_n \to a$ où $a = \lim z, z_1 \dots z_n = z, z_1 z_2 z_3 \dots$

Il reste à montrer l' ~~unicité~~ unicité.

Soit $a = z, z_1 z_2 z_3 \dots$, $b = y, y_1 y_2 y_3 \dots$ si $y \neq z$ par exemple $y > z$, alors

$$a - b = z - y + \sum_1^\infty \frac{z_n - y_n}{g^n} \leq -1 + \frac{g-1}{g} \sum_0^\infty \frac{1}{g^n} = 0$$

où dans l'inégalité le signe égal est valable ssi $z - y = -1$ et $z_n - y_n = g - 1$ pour tout $n \geq 1$, c.a.d $y = z+1$ et $y_n = 0$, $z_n = g-1$ pour $n \geq 1$. Dans le cas $y > z$ ceci est la seule possibilité pour avoir $a = b$.

Supposons maintenant $y = z$, $y_n = z_n$ pour $n \leq p-1$ et $y_p \neq z_p$, par exemple $y_p > z_p$.

Soit $a' = g^p a = z', z_1' z_2' \dots$ et $b' = g^p b = y', y_1' y_2' \dots$ avec $z_i' = z_{i+p}$, $y_i' = y_{i+p}$. On a $y' > z'$. De $a' = b'$ suit comme on l'a déjà vu $y' = z'+1$ et $y_i' = 0$, $z_i' = g-1$ resp. $y_p = z_p + 1$ et $y_{p+i} = 0$ $z_{p+i} = g-1$ pour $i = 1, 2, 3 \dots$

Ceci montre l' ~~existence~~ unicité du développement dans le sens du théorème. □

cours 4

Corollaire

~~$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $x' \in \mathbb{Q}$~~
~~on a : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x' \in \mathbb{Q}$ $|x - x'| < \varepsilon$.~~

~~1ème Remarque~~ ~~Pour $a \geq 0$ on a $a = \lim z, z_1 \dots z_n$ et c'est une suite de nombres rationnels~~

~~Ceci montre que notre construction de $\mathbb{R}$ est la bonne.~~

Remarque

~~Un nombre réel est rationnel ssi son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang (exercice)~~

Remarque (développement g-adique des nombres naturels) Soit g un nombre naturel $\geq$

Tout nombre naturel $n > 0$ admet un développement unique

$n = z_0 + z_1 g + \dots + z_p g^p$; $z_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq z_i \leq g-1$, $z_p \neq 0$ $p \in \mathbb{N}$

(exercice). On écrit $n = z_p \dots z_1 z_0$.

Cette remarque peut être appliquée en particulier à z dans le développement ci-dessus.

Corollaire 1

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in \mathbb{Q} \quad |x - x'| < \varepsilon$

Preuve

Pour $a \geq 0$ on a $a = \lim z, z_1 \dots z_n$ et c'est une suite ~~des~~ de nombres rationnels.

Corollaire 2

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, c.a.d. il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque

En particulier la plupart des éléments de $\mathbb{R}$ ne proviennent pas de $\mathbb{Q}$ (et la plupart des éléments de $\mathbb{R}$ ne sont pas calculables par un ordinateur)

Preuve (Corollaire 2)

Nous allons montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $\mathbb{N} \to [0, 1[$.

Sinon il existerait une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $\forall x \in [0, 1[\; \exists n \in \mathbb{N}$ $u_n = x$. Écrivons les ~~vectors~~ valeurs de cette suite en écriture décimale :

$$u_0 = 0, a_{00}\, a_{01}\, a_{02} \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{0j}}{10^{j+1}}$$

$$u_1 = 0, a_{10}\, a_{11}\, a_{12} \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{1j}}{10^{j+1}}$$

On interdit $u_{nj} = 9$ pour presque tout j. On considère alors la suite

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{n,n} \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $y = 0, b_0 b_1 \ldots b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{10^{n+1}} \in [0,1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $y \neq u_n$ puisque leur n^e décimales diffèrent.

Ceci contredit la surjectivité. $\square$

Théorème

Soit $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Soit $a > 0$ $a = Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$. Alors $a \in \mathbb{Q}$

ssi $\exists M \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq M$ $z_{n+T} = z_n$.

(On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.)

Preuve : Exercice (TD).

5 Fonctions d'une variable réelle

5.1 Généralités

* On appelle fonction d'une variable réelle à valeurs réelles une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La partie D est appelée ensemble de définition de la fonction.

La fonction f définie sur D est dite

- croissante si $\forall (x,x') \in D^2 \quad (x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$

On définit de la même façon décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.

- monotone si elle est croissante ou décroissante et strictement monotone si elle est str. croissante ou str. décroissante
- majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$.

Si f est majorée, elle admet une borne supérieure (le plus petit majorant) notée $\sup_D f$.

On définit de la même façon minorée. Si f est minorée elle admet une borne inférieure notée $\inf_D f$.

- bornée si elle est majorée et minorée

* Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$

- Si D' est une partie de D, on dit que la fonction f possède une certaine propriété sur D' si la restr. de f à D' possède cette propriété.
- Si $a \in \mathbb{R}$ on dit que f possède une certaine propriété au voisinage de a s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a t.q. f possède cette propriété sur $\mathcal{U} \cap D$.

* Les fonctions sur un même ensemble de définition sont additionnées et multipliées point par point, de même pour la multiplication par un réel.

(29)

$\alpha \in \mathbb{R}$

$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x) := f(x)g(x)$, $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$

α Composition Soient D_f, D_g avec $f(D_f) \subset D_g$.

Alors on peut définir $g\circ f$ sur D_f par

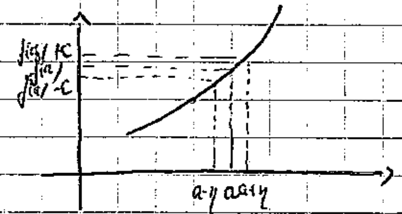
$\forall x \in D_f \quad (g\circ f)(x) = g(f(x))$.

5.2. Fonctions continues

Définition

Soit f une fonction ~~continue~~ définie sur D et $a \in D$. On dit que f est continue en a si

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.



Théorème

Une fonction continue en a est bornée au voisinage de a.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ t.q. $\forall x \in D \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Donc f est bornée par $f(a) - \varepsilon$ et $f(a) + \varepsilon$ sur $]a-\eta, a+\eta[\cap D$, donc au voisinage de a. □

On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point $a \in D$. On note l'ensemble des fonctions continues sur D $C(D, \mathbb{K})$. On note $Lip(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur D.

Théorème

$\boxed{\text{Toute fonction lipschitzienne sur } D \text{ est continue } \cancel{\text{en tout point}} \text{ sur } D, \text{ i.e. } Lip(D, \mathbb{R}) \subset C(D, \mathbb{R})}$

Preuve

Soit $L \geq 0$ la constante de Lipschitz.

- Si $L = 0$, f est constante et donc continue
- Si $L > 0$: Soit $\varepsilon > 0$, posons $\eta = \frac{\varepsilon}{L}$. Alors pour tout $a \in D$

$\forall x \in D \quad |x - a| < \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. D

Soit f une fonction définie sur D et $a \in D$. f est dite continue à droite en a si la restriction de f à $[a, +\infty[\cap D$ est continue en a.

f est dite continue à gauche en a si la restriction de f à $]-\infty, a] \cap D$ est continue en a.

~~critère séquentiel voir page 34~~

5.3 Limites

Soit I un intervalle, a un point de I, et f une fonction définie sur I, sauf peut-être au point a. On dit que f admet une limite en a s'il existe une fonction $\bar{f}$ prolongeant f à I et continue en a. On pose alors $\lim_{x \to a} f(x) = \bar{f}(a)$ ($\lim_a f = \bar{f}(a)$)

La définition de la limite de f revient donc à celle de la continuité de $\bar{f}$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in D \ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Remarque (Exercice)

1) Le réel l, s'il existe, est unique.

2) Deux cas se présentent

- f est défini en a. Le seul prolongement de f à I est f elle-même. Dans ce cas, f admet une limite en a ssi elle est continue en a, et alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- f n'est pas définie en a. f admet une limite en a s'il existe un réel l t.q. la fonction $\tilde{f}$ défini par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en a. Dans ce cas, $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

On dit que f admet une limite à droite en a si la restriction de f à $]a,\infty[\cap I$ admet une limite en a.

Notation: $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ~~ou li~~

f admet une limite à gauche en a si la restriction de f à $]-\infty, a[\cap I$ admet une limite en a. Notation $\lim_{x\to a^-} f(x)$

- On peut étendre la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = l$ au cas où $l = \pm\infty$:

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}\ \exists \eta > 0\ \forall x \in D\ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$

$\lim_{x\to -a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}\ \exists \eta > 0\ \forall x \in D\ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) < A$

De même, si f est défini sur un intervalle I non majoré, on dit qu'elle admet une limite en $+\infty$ si

$\lim_{x\to \infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim f(x) = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ x > B \Rightarrow f(x) > A.$

Exercice

Écrire les définitions pour

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème

Soit f une fonction croissante sur l'intervalle $[a,b[$
- ou bien f est bornée sur $[a,b[$ et $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in [a,b[} f(x)$.
- ou bien f n'est pas bornée sur $[a,b[$ et $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$

Preuve : Exercice

5.4. Opérations sur les limites

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Règles de calcul

1) Si f et g admettent des limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f+g$ admet une limite finie en a et,

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

2) Si f et g admettent des limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \cdot g$ admet une limite finie en a et

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$$

3) Si f et g admettent des limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, la limite de g étant non nulle, f/g admet une ~~lmte~~ limite finie en a et

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Preuve : Exercice

Corollaire

La somme, le produit, le quotient de deux fonctions continues est continu partout où il est défini.

Théorème (Composée de deux fonctions)

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I (sauf peut-être en b) et J (sauf peut-être en a) tels que $g(J) \subset I$. Si

$\lim_{x \to a} g(x) = b$, $\lim_{x \to b} f(x) = c$, alors $\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = c$

Preuve

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - b| < \alpha \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$

~~$\forall \alpha > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall t \in J$~~

$\forall \alpha > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall t \in J \quad |t - a| < \beta \Rightarrow |g(t) - b| < \alpha$

Or, pour tout $t \in J$ $g(t) \in I$, donc

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall t \in J \quad |t - a| < \beta \Rightarrow |f(g(t)) - c| < \varepsilon$,

ce qui prouve bien $\lim_{x \to a} f(g(x)) = c$. □

Corollaire

La composée de deux fonctions continues en tout point est continue en tout point.

Preuve

C'est le cas où $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ et

$\lim_{y \to g(a)} f(y) = f(g(a))$, d'où $\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f \circ g(a)$.

Théorème (Critère séquentiel)

i) Limite

Soit I un intervalle, a un point de I et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction défini sur $D = I$ ou $D = I \setminus \{a\}$. On a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

ssi pour toute suite (x_n) d'éléments de D, $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ qui converge vers a on a

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell.$$

ii) Continuité

$f : D \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in D$ ssi pour toute suite d'éléments de D avec $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, on a.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

Avant de démontrer le théorème on a besoin de la définition suivante.

Définition

Un point $a \in D$ est un point d'accumulation de D si ~~dans~~ chaque voisinage de a dans $\mathbb{R}$ contient un nombre infini de points de D.

Remarque

On peut définir la ~~limite~~ notion de limite d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ en a si a est point d'accumulation de D.

cours 5

Preuve du théorème

Limite

"$\Rightarrow$" Soit $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et (x_n) une suite qui converge vers a. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ t.q. pour $|x-a| < \eta$ on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. À cause de $x_n \to a$ on a $|x_n - a| < \eta$ et donc $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ pour presque tout n.

"$\Leftarrow$" Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ soit fausse. Il faut construire une suite (x_n) qui converge vers a t.q. $f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ est ~~fausse~~ fausse, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ "d'exception" t.q. $\forall \eta > 0$ $\exists x_\eta$ $|x_\eta - a| < \eta$ et $|f(x_\eta) - \ell| \geq \varepsilon_0$. Nous choisissons $\eta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n$ $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$

On a $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ mais $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} \ell$.

Continuité

Si a est un point d'accumulation de D, la preuve est analogue à la partie 1) du théorème. Sinon f est continue on a et pour toute suite ~~qui converge~~ d'éléments de D qui converge vers a on a $x_n = a$ pour presque tout n.

$\square$

5.5. Fonctions continues sur un intervalle

*

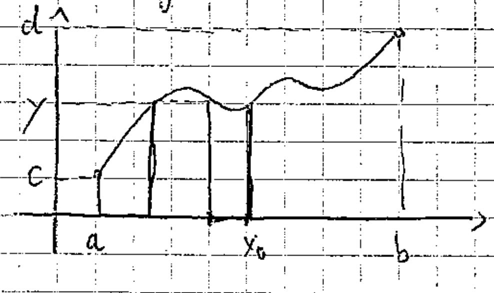
Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f prend sur I deux valeurs c et d, elle prend sur I toute valeur intermédiaire entre c et d.

Preuve

Soit $(a,b) \in I^2$ t.q. $f(a) = c$ et $f(b) = d$. Supposons, pour fixer les idées, que $a < b$ et $c < d$. Soit $y \in]c,d[$, montrons que y possède un antécédant dans $[a,b]$.

Posons $E = \{x \in [a,b] : f(x) \leq y\}$. E est non vide, car $a \in E$; E est majoré par b, donc E admet une borne supérieure x_0



Il existe une suite (a_n) d'éléments de E qui converge vers x_0.
Comme f est continue en x_0, la suite $f(a_n)$ converge vers $f(x_0)$, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(a_n) \leq y$, on a aussi $f(x_0) \leq y$.

Puisque $f(b) > y$, on est sûr que $x_0 \neq b$. Or pour tout $x \in]x_0, b[$: $f(x) > y$; on en déduit que la limite à ~~droite~~ gauche de f en x_0, qui n'est autre que $f(x_0)$ puisque f est continue, est supérieure ou égale à y : $f(x_0) \geq y$.

En définitive : $f(x_0) = y$. □

* Rappel : Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si dès qu'elle contient deux

réels, elle contient tous les réels intermédiaires, c.a.d.

$\forall (c,d) \in J^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \ (c \leq x \leq d \Rightarrow x \in J)$.

Segment : $[a,b]$ $a<b$; $a,b \in \mathbb{R}$.

Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Preuve

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I.
Dès que $f(I)$ contient deux éléments c et d, il contient tous les éléments intermédiaires : par définition, $f(I)$ est un intervalle. $\square$

Théorème

Une fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes. L'image de $[a,b]$ est donc un segment :
$f([a,b]) = [m, M]$ où $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$

Preuve

Posons $J = f([a,b])$, et $M = \sup J \in \overline{\mathbb{R}}$: M est un réel ou $+\infty$ suivant que J est majoré ou non.
Dans les deux cas, il existe une suite (y_n) d'éléments de J telle que $\lim_{n \to \infty} y_n = M$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f([a,b])$, c.a.d. il existe $x_n \in [a,b]$ t.q. $f(x_n) = y_n$.
La suite (x_n) est bornée, on peut donc extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit l la limite de cette suite extraite ; comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_{\varphi(n)} \in [a,b]$, on a aussi $l \in [a,b]$.

f est continue en ℓ, et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = f(\ell)$.
La suite (y_n) ne tend donc pas vers $+\infty$; elle converge, et sa limite est la même que celle de la suite extraite $(y_{\varphi(n)})$!

$$M = f(\ell) \quad , \text{ d'où } \quad M \in f([a,b])$$

ce qui montre que l'intervalle J est majoré et que sa borne supérieure est atteinte. On démontrerait de même que J est minoré et que sa borne inférieure m est atteinte.
En définitive :

$$J = [m, M] \qquad \square$$

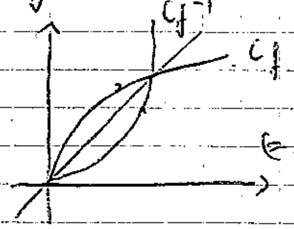
On considéra maintenant le cas d'une fonction strictement monotone sur un intervalle :

Théorème

Soit f une fonction continue strictement ~~continue~~ monotone sur un intervalle I.

1) $f(I)$ est un intervalle, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.
2) f est une bijection de I dans $f(I)$
3) La bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement monotone de même sens que f.

Dessin



$(x,y) \in C_f$
$\iff (y,x) \in C_{f^{-1}}$

Preuve

Supposons, pour fixer les idées, que f soit strictement croissante, et posons $I =]a,b[$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1) $\forall x \in]a,b[\quad \lim\limits_a f < f(x) < \lim\limits_b f$ donc $f(I) \subset]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f[$

Réciproquement soit $y \in]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f[$, y n'étant ni un minorant ni un majorant de $f(I)$, il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ $f(x_1) < y < f(x_2)$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_0 \in I$ $f(x_0) = y$, d'où $y \in f(I)$.

En définitive, $f(I) =]\lim_a f, \lim_b f[$

2) Par définition, f est une surjection de I dans $f(I)$.

Montrons qu'elle est injective. Soit $(x, x') \in I^2$ t.q. $f(x) = f(x')$

- Si $x < x'$, $f(x) < f(x')$: contradiction
- Si $x > x'$, $f(x) > f(x')$: contradiction

Donc $x = x'$. f est bijective

3) Soit $(y, y') \in f(I)^2$ $y < y'$. Posons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$.

Si $x \geq x'$ $f(x) \geq f(x')$, c.a.d. $y \geq y'$: contradiction. Donc $x < x'$: f^{-1} est strictement croissante.

Montrons qu'elle est continue. Choisissons encore $I =]a, b[$.

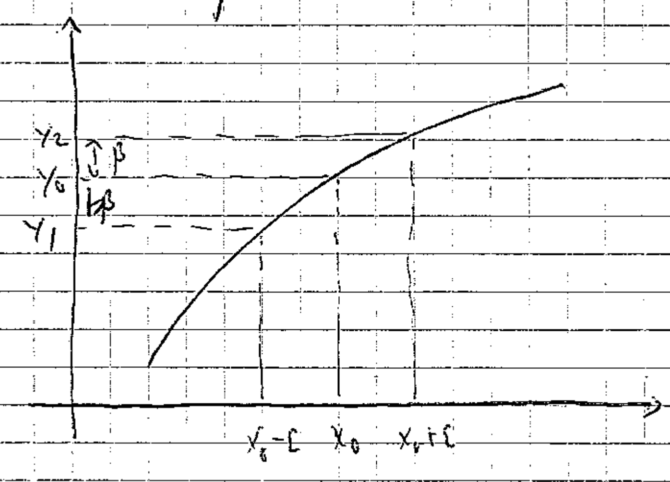
Soit $y_0 \in f(I)$. Posons $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 - \varepsilon \in I$ et $x_0 + \varepsilon \in I$. Posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$.

f étant strictement croissante : $y_1 < y_0 < y_2$. $\forall y \in [y_1, y_2]$

$f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_2)$, c.a.d. $x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon$

Il existe donc $\beta > 0$ t.q. $|y - y_0| \leq \beta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \varepsilon$.

Par conséquent f^{-1} est continue en y_0. ☐



Exemple

$I = \mathbb{R}_+ \ (= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})$

$f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1.$

$f(I) = \mathbb{R}_+$

$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}.$

Cours 6

Cours 7

5.6. Continuité uniforme

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

Rappel :

f est continue en tout point de D si

$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in D \quad |x - y| < \eta$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Définition

On dit que f est uniformément continue sur D s'il reste η ne dépendant que de ε.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in D^2 \quad |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Théorème

Toute fonction lipschitzienne sur D est uniformément continue sur D.

Preuve : Exercice

Rappel : f ~~a D~~ $\Rightarrow f : D \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne si

$\exists k \geq 0 \quad \forall (x, x') \in D^2 \quad |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$

Théorème (Heine)

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Preuve

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Supposons que f ne soit pas uniformément continue.

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists (x,y) \in [a,b]^2 \quad |x-y| < \eta$ et $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$

En particulier, pour $\eta = \frac{1}{n}$:

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \quad \exists (x_n, y_n) \in [a,b]^2 \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

La suite (x_n) est bornée, on peut donc en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Soit l sa limite. Comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$, la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge aussi vers l.

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \quad a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, donc $a \leq l \leq b$: l appartient à $[a,b]$.

f étant continue, les suites $(f(x_{\varphi(n)}))$ et $f(y_{\varphi(n)})$ convergent vers $f(l)$ et, par conséquent $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})$ converge vers 0, ce qui contredit l'inégalité $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$.

Donc f est uniformément continue sur $[a,b]$. $\square$

5.7. Suites de fonctions

On note $\mathbb{R}^D$ l'ensemble des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$. Une suite de fonctions est une application $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$.

Définition (convergence simple)

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement si la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x \in D$. Dans ce cas on définit $f : D \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

et on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f.

Définition (convergence uniforme)

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Exemples

1. $f_n(x) = x^n$, $D = [0, 1]$. On a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

i.e. f_n converge simplement vers f. La convergence n'est pas uniforme. D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour tout n il existe $x_n \in (0, 1)$ t.q.

$$|f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}.$$

2. Soit $D = ~~\mathbb{R}_+~~ ~~[0,1]~~ \mathbb{R}_+$

$$\phi(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$f_n(x) = \phi(nx) \qquad (x \in \mathbb{R}\,;\ n = 1, 2, 3, \dots)$$

On a

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

puisque pour tout $x > 0$ on a $f_n(x) = 0$ dès que $nx \ge 1$.
La convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$ puisque
$f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$.

Théorème

Soit ~~$f_n : D \to \mathbb{R}$~~ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions avec ensemble de définition D t.q. $f_n \to f$ uniformément sur D. Si f_n est continue en $a \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est continue en a. Si f_n est continue sur D pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est continue sur D.

En bref: La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. À cause de la convergence uniforme il existe un indice m avec

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in D.$$

Comme f_m est continue on a il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|x - a| < \eta \implies |f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon.$$

Pour $|x - a| < \eta$ on a donc

$$|f(x) - f(a)| \le \underbrace{|f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)|}_{< 3\varepsilon}$$

ce qui montre la continuité de f au point a.

NB

L'hypothèse que la convergence est uniforme est essentielle, voir exemple 1.

Cours 6

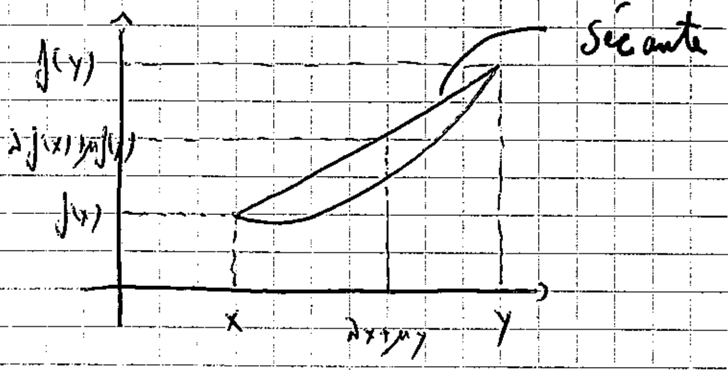
5.8. Fonctions convexes

Définition

Une fonction numérique f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite convexe, si, quels que soient $x, y \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, on a l'inégalité

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Elle est dite concave, si $-f$ est convexe.



Exemples : e^x est convexe, $\ln x$ est concave.