Topologie des espaces métriques, 2011/12.

Chapitre 1

Préliminaires sur $\mathbb{R}$

1.1 Caractérisation de $\mathbb{R}$

Nous rappelons la caractérisation fondamentale de $\mathbb{R}$ et nous explicitons par la suite les notions en jeu dans cet énoncé.

Théorème 1.1. *Il existe un unique corps totalement ordonné dans lequel toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.*

Ce corps, noté $\mathbb{R}$, contient le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

On dit que $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure. On rappelle les nombreuses notions impliqués dans cet énoncé : corps, relation d'ordre, relation d'ordre totale, ensemble majoré, et borne supérieure.

Informellement, un corps est un ensemble muni de deux lois $(+, \times)$ avec les propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication (cela sera vu très en détail dans le cours d'algèbre).

Définition. Une *relation d'ordre* $\prec$ sur un ensemble X est une relation binaire, c'est-à-dire la donnée d'une partie V de $X \times X$ où $x \prec y \Longleftrightarrow (x, y) \in V$, vérifiant les axiomes suivants :

Réflexivité. Pout tout $x \in X$, $x \prec x$.

Antisymétrie. Pour tous $x, y \in X$, si $x \prec y$ et $y \prec x$ alors $x = y$.

Transitivité. Pour tous $x, y, z \in X$, si $x \prec y$ et $y \prec z$ alors $x \prec z$.

L'ordre est dit *total* si la condition suivante est satisfaite :
Pour tous $x, y \in X$, on a $x \prec y$ ou $y \prec x$.

Le couple $(X, \prec)$ est appelé ensemble ordonné. On dira ensemble totalement ordonné si la relation $\prec$ est une relation d'ordre totale ; on dira partialement ordonné si la relation d'ordre n'est pas totale. Par exemple, $(\mathbb{N}, \leq)$

et $(\mathbb{R}, \leq)$ sont totalement ordonnés. D'autre part $(X = \mathcal{P}(E), \subset)$, l'ensemble des parties d'un ensemble E muni de la relation d'inclusion, est un ensemble partialement ordonné. (Dans ce texte $\subset$ et $\subseteq$ signifient "est inclus dans", tandis que $\subsetneq$ signifie "est inclus strictement dans".)

Définition. Soit $A \subset X$ une parte non vide. Soit $(X, \prec)$ un ensemble ordonné. On dit que $m \in X$ est un *majorant de* A (resp. *minorant de* A) si

(A1) Pour tout $a \in A$, $a \prec m$ (resp. $m \prec a$)

On dit que $m \in X$ est la *borne supérieure* (resp. *inférieure*) de A si c'est un majorant (resp. minorant) de A et si de plus

(A2) Pour tout majorant m' de A, on a $m \prec m'$ (resp. pour tout minorant m' de A, on a $m' \prec m$).

Notation. Une partie non vide A est dite *majorée* (resp. *minorée*) si elle admet un majorant (resp. minorant). Quand elle existe, la borne supérieure (resp. inférieure) est notée $\sup A$ (resp. $\inf A$).

Remarques.
- Une partie majorée n'admet pas forcément de borne supérieure.
- La borne supérieure d'une partie A n'est pas forcément dans A.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants : si M est l'ensemble des majorants de A, alors m est la borne supérieure de A si et seulement si $m \in M$ et m est un minorant de M. On voit ici que la borne supérieur est unique.

Exemple. La partie $A =]-\infty, 0[$ n'admet pas de borne supérieure dans $(\mathbb{R}^*, \leq)$ et admet 0 comme borne supérieure dans $(\mathbb{R}, \leq)$. Il est bien connu que $(\mathbb{Q}, \leq)$ n'a pas la propriété de la borne supérieure : il existe dans $\mathbb{Q}$ des parties non vides majorées sans borne supérieure, par exemple $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$.

Remarque. Dans le théorème 1.1, on suppose les opérations $(+, \times)$ compatibles avec l'ordre, dans le sens suivant. On a

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

et

$$(a \leq b \text{ et } \lambda \geq 0) \Rightarrow \lambda a \leq \lambda b.$$

Corollaire 1.2. *Toute partie non vide minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Démonstration. Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et minorée, alors $-A$ est majorée, admet une borne supérieure m et $-m$ convient. □

Proposition 1.3. *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et m un majorant de A. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. Le nombre réel m est la borne supérieure de A.

ii. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $m - \varepsilon < a$.

Démonstration. On démontre $(i) \Rightarrow (ii)$. En effet (ii) revient à dire que $m' = m - \varepsilon$ n'est pas une majorant de A. Admettons en raisonnant par l'absurde que m' est un majorant de A. On a $m \geq m'$ car ε est positif. D'autre part, grâce à (i), on a $m \leq m'$. Par conséquence $m = m'$, ce qui entraine $\varepsilon = 0$, une contradiction.

On démontre $(ii) \Rightarrow (i)$. On raisonne par l'absurde et on admet qu'il existe m', majorant de A, tel que $m' < m$. Soit $\varepsilon = m - m' > 0$, alors il existe $a \in A$ tel que $m' = m - \varepsilon < a$. Ainsi, $A \ni a > m'$, ce qui contredit le fait que m' est un majorant. □

1.2 Suites

Définition. Une suite réelle est la donnée d'une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On emploie souvent la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou bien simplement (u_n), ou encore $u_n = u(n)$.

Définition. Une suite réelle (u_n) converge vers m si la condition suivante est satisfaite : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \geq 0$ $\forall n \geq n_0$, $u_n \in]m - \varepsilon, m + \varepsilon[$.

On écrit

$$\lim_{n\to\infty} u_n = m.$$

La proposition précédente admet une formulation en terme de suites.

Proposition 1.4 (caractérisation séquentielle de la borne supérieure)**.** *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et m un majorant de A. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. Le nombre réel m est la borne supérieure de A.

ii'. Il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers m.

Démonstration. Grâce à la proposition précédente on peut remplacer la condition (i) par la condition suivante.

ii. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $m - \varepsilon < a$.

On démontre (ii') en admettant la propriété (ii) qu'on vient d'énoncer. Alors, lorsqu'on fixe $\varepsilon = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^\times$ il existe $a_n \in]m - 1/n, m]$. Ainsi, en fixant a_0 de façon arbitraire, on définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit ε un nombre réel > 0 et soit $n_0 \in \mathbb{N}^\times$ un nombre naturel tel que $1/n_0 < \varepsilon$. Alors $\forall n \geq n_0$ le terme

$$a_n \in]m - 1/n, m] \subset]m - 1/n_0, m] \subset]m - \varepsilon, m] \subset]m - \varepsilon, m + \varepsilon[$$

Réciproquement, la propriété (ii') de l'énoncé entraine (ii). En effet $\forall \varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $a_{n_0} \in]m-\varepsilon, m+\varepsilon[$. Le nombre réel m étant un majorant de A on a $a_{n_0} \in]m - \varepsilon, m]$. $\square$

Dans cette section on rappelle le théorème de Bolzano–Weierstrass. Son énoncé et sa démonstration mettent en jeu au moins deux notions fondamentales : celle de segments emboitées et celle valeur d'adhérence. On commence par une corollaire du théorème de caractérisation du corps $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.5. *Toute suite réelle croissante et majorée converge.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite majorée. Ceci veut dire que l'ensemble $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré. On pose $m = \sup A$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x_N \in A$ tel que $m - \varepsilon < x_N$. Comme $x_N \leq x_n \leq m$ pour tout $n \geq N$ on a $|m - x_n| \leq \varepsilon$ et donc (x_n) converge vers m. $\square$

Remarque. Toute suite réelle décroissante et minorée converge.

Théorème 1.6 (théorème des segments emboités)**.** *Soit a_n et b_n deux suites réelles telles que $\varnothing \neq [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ pour tout n. Alors*
- *a_n converge vers a,*
- *b_n converge vers b, et on a*
- *$\bigcap_{n\geq 0}[a_n, b_n] = [a, b]$.*

De plus, si $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, alors
- *$\bigcap_{n\geq 0}[a_n, b_n] = \{a\} = \{b\}$.*

Démonstration. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par tout valeur atteint par la suite $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$. En effet fixons m et montrons que b_m est un majorant de $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; c-à-d, $a_n \leq b_m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq m$, alors $a_n \leq b_n \leq b_m$. Si $n \leq m$, alors $a_n \leq a_m \leq b_m$.

Donc (a_n) converge vers $a \leq b_m$ pour tout entier m. Donc (b_m) est minorée par a et converge vers $b \geq a$. Comme $[a, b] \subset [a_n, b_n]$ pour tout n on a $[a, b] \subset \bigcap_{n\geq 0}[a_n, b_n]$. Réciproquement si $x \in \bigcap_{n\geq 0}[a_n, b_n]$ alors $x \geq a_n$ pour tout n donc $x \geq a$. De même $x \leq b$. Donc x appartient à $[a, b]$.

Enfin $b - a \leq (b_n - a_n) \to 0$ implique $b - a \leq 0$ d'où $a = b$. $\square$

Notation. Les suites (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes si $a_n - b_n$ tend vers 0.

Définition. Etant donné une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) de u toute suite $u \circ \phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Exercice. Soit (u_n) une suite réelle non bornée. Monter qu'il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ telle que $|u_{\phi(n)}| \to \infty$.
Solution. On définit $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante par récurrence. On pose $\phi(0) = 0$. Puis, $\phi(0), \ldots, \phi(n)$ étant définis, on choisit $\phi(n+1) > \phi(n)$ tel que $|u_{\phi(n+1)}| \geq \phi(n+1)$. Un tel $\phi(n+1)$ existe toujours sinon u serait bornée. Par construction $|u_{\phi(n)}| \geq n$ donc u tend vers $+\infty$.

Définition. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est *valeur d'adhérence* d'une suite (u_n) s'il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ convergeant vers ℓ.

Exemple. La suite $u_n = (-1)^n$ admet -1 et 1 comme valeurs d'adhérence.

Proposition 1.7 (caractérisation fondamentale)**.** *Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. Le nombre réel ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n).

ii. Pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une infinité d'entiers n tel que $u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$. Autrement dit, on a la propriété suivante

$$\forall \varepsilon > 0,\ J_\varepsilon = \big\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]\big\} \text{ est infini .}$$

Démonstration. Considérons l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(u_{\phi(n)})$ une sous-suite convergeant vers ℓ. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_{\phi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$. Or $\{\phi(n) \mid n \in \{N, N+1, \ldots\}\} = \phi(\{N, N+1, \ldots\})$ est infini puisque ϕ est strictement croissante donc injective.

On démontre l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$. On observe que (ii) entraine la propriété suivante.

$$(\star) : \forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

En effet, l'ensemble J_ε des entiers n tel que $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ est infini. Donc pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \in J_\varepsilon$ tel que $n \geq n_0$. Cette propriété permet de définir une suite extraite qui converge vers ℓ. On définit $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante par récurrence. On pose $\phi(0) = 0$, puis $\phi(0), \ldots, \phi(n)$ étant définis, on applique ($\star$) avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ et $n_0 = \phi(n) + 1$. Cela donne un entier $\phi(n+1) > \phi(n)$ tel que $u_{\phi(n+1)} \in [\ell - \frac{1}{n+1}, \ell + \frac{1}{n+1}]$. Il est alors clair que $u \circ \phi$ converge vers ℓ. □

Théorème 1.8 (Bolzano-Weirstrass)**.** *Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Soit u une suite bornée de $\mathbb{R}$. On construit une suite d'intervalles emboités $[a_i, b_i]$ tels que $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [a_i, b_i]\}$ est infini pour chaque i et tels que $a_i - b_i$ tende vers 0. On commence par choisir $[a_0, b_0]$ contenant tous les u_n. Puis $[a_0, b_0], \ldots, [a_i, b_i]$ étant défini, on choisit $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ comme l'une des moitiés $[a_i, \frac{a_i+b_i}{2}]$ ou $[\frac{a_i+b_i}{2}, b_i]$ contenant u_n pour une infinité d'entiers n. (Au moins l'une des deux convient). On a alors $\cap_{i=0}^{\infty}[a_i, b_i] = \{a\}$ pour un certain nombre réel $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $[a_i, b_i] \subset [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ pour i assez grand et comme $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [a_i, b_i]\}$ est infini, $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$ aussi. On conclut avec la caractérisation des valeurs d'adhérence 1.7. □

1.3 Développement décimal

Dans cette section on rappelle le développement décimal. À la fin de la section on indiquera comment cet outil permet de démontrer le théorème de caractérisation des nombres réels.

Définition. On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$ pour $i \geq 1$ est un *développement décimal* de $x \in \mathbb{R}$ si

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n/10^n$$

On note alors $x = a_0, a_1a_2a_3\ldots$. Le développement est dit *propre* s'il ne finit pas par une infinité de 9.

Remarques.

– Il n'y a pas d'unicité du développement décimal. Par exemple

$$0,999999\cdots = 1 = 1,00000\ldots$$

en utilisant $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ pour $r \in]0, 1[$.

– Tout développement décimal donne un réel vu que $n \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i/10^i$ est une suite croissante majorée donc convergente.

Définition. Pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x est le plus grand entier $\leq x$ (qui est aussi l'unique entier tel que $[x] \leq x < [x]+1$ ou encore $\sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$).

Proposition 1.9. *Tout $x \in \mathbb{R}$ admet un unique développement décimal propre. De plus $x = [x], a_1 a_2 a_3 \dots$ où $[x]$ est la partie entière de x.*

Démonstration. On considère l'algorithme suivant : si $x \in \mathbb{R}$, on définit $x_1 = x - [x] \in [0,1[$, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = [10^n x_n] \in \{0,\dots,9\} \text{ et}$$

$$x_{n+1} = x - [x] - \sum_{i=1}^{n} a_i/10^i = x_n - a_n/10^n = \frac{1}{10^n}\left(10^n x_n - [10^n x_n]\right) \in [0, 1/10^n[$$

La condition $x_{n+1} \in [0,1/10^n[$ implique $a_{n+1} \in \{0,\dots,9\}$ pour $n \geq 0$. Comme x_n tend vers 0 on a $x = [x] + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n/10^n$.
Propreté : si $a_i = 9$ pour tout $i \geq i_0$ on a $x_{i_0+1} = \sum_{i=i_0+1}^{\infty} 9/10^i = 1/10^{i_0}$, une contradiction.
Unicité : on suppose que $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i/10^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i/10^i$ avec $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ et (a_i), (b_i) propres et différents. Soit $i_0 \in \mathbb{N}$ le premier indice pour lequel $a_{i_0} \neq b_{i_0}$ ($a_{i_0} > b_{i_0}$ par exemple) alors

$$0 = x - x = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i/10^i - \sum_{i=i_0}^{\infty} b_i/10^i \geq \frac{a_{i_0} - b_{i_0}}{10^{i_0}} - \sum_{i=i_0+1}^{\infty} b_i/10^i$$

On a $-b_i \geq -9$ pour tout entier i et l'inégalité est stricte pour une infinité d'entiers i (le développement est propre). Donc on a

$$x - x > \frac{1}{10^{i_0}} - 9 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \frac{1}{10^{i_0}} - \frac{1}{10^{i_0}} = 0,$$

une contradiction. □

Proposition 1.10. *Soit x un réel. Alors $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang,*

Démonstration. On fait la division euclidienne : pour $x = p/q > 0$, on écrit $p = b_0 q + r_0$ pour $b_0 \in \mathbb{N}$ et $r_0 \in \{0,\dots,q-1\}$. Puis on définit par récurrence $b_{n+1} \in \{0,1,\dots,9\}$ et $r_{n+1} \in \{0,\dots,q-1\}$ par la relation

$$10 r_n = b_{n+1} q + r_{n+1} \tag{1.1}$$

On a en effet $b_{n+1} = [10r_n/q] \in \{0, \dots, 9\}$ car $r_n < q$. La suite (r_n) étant à valeurs entières entre 0 et $q-1$, il existe $n_1 > n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{n_0} = r_{n_1}$. La relation 1.1 implique que $b_{n_0+1} = b_{n_1+1}$ et que $r_{n_0+1} = r_{n_1+1}$ puis en l'itérant que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $b_{n_0+i} = b_{n_1+i}$. La séquence $b_{n_0}b_{n_0+1}\dots b_{n_1-1}$ se répète alors à l'infini. Il reste à identifier les b_i avec le développement décimal de p/q. Ceci découle de la relation $r_n/q = 10^n x_{n+1}$, qu'on obtient par récurrence avec l'égalité

$$r_{n+1}/q = 10r^n/q - b_{n+1} = 10^{n+1}x_{n+1} - [10^{n+1}x_{n+1}] = 10^{n+1}x_{n+2},$$

On voit alors que

$$b_{n+1} = [10r_n/q] = [10^{n+1}x_{n+1}] = a_{n+1}$$

la $n+1$-ième décimale du développement propre de x.
Réciproque : supposons que $x = a_0, a_1a_2\dots$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n = a_{n+T}$. Notons a le rationnel

$$a = \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{a_{n_0+1}}{10^{n_0+1}} + \dots + \frac{a_{n_0+T-1}}{10^{n_0+T-1}}$$

On a alors

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = a + \frac{a}{10^T} + \dots + \frac{a}{10^{kT}} + \dots$$

$$= a\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{10^T})^k = a\frac{1}{1-\frac{1}{10^T}} \in \mathbb{Q}.$$

□

Remarques.

– Tout irrationnel est limite d'une suite de rationnels et inversement.

– Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$, on peut définir $\sup A$ à partir des développements décimaux propres des éléments de A. On pose $b_0 = \sup\{[x] \mid x \in A\}$, $b_1 = \sup\{a_1 \in \{0, \dots, 9\} \mid x = b_0, a_1a_2a_3\dots \in A\}$. Noter que si $i \geq 0$, $b_0, b_1, \dots, b_i$ étant définis il existe un élément $x = b_0, b_1b_2\dots b_ia_{i+1}a_{i+2}\dots$ contenu dans A (le sup est atteint). On peut donc poser $b_{i+1} = \sup\{a_{i+1} \mid x = b_0, b_1b_2\dots b_ia_{i+1}a_{i+}\dots \in A\}$ (ensemble non vide). On définit $m = b_0, b_1b_2\dots$

Exercice. Montrer que m est la borne supérieure.

Remarque. Sur $A = [0, 1[$ ce procédé donné $\sup A = 0,999\dots = 1$.

1.4 Dénombrabilité

Dans cette section on rappelle la notion de dénombrabilité et on voit comment l'outil des segments emboités permet de démontrer aisément que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Définition. Un ensemble X est *dénombrable* s'il s'injecte dans $\mathbb{N}$.

Proposition 1.11. *Soient X, Y deux ensembles. Il existe une injection de X dans Y si et seulement si il existe une surjection de Y dans X.*

Démonstration. Soit $f \colon X \to Y$ une injection. Fixons $x_0 \in X$. Pour $y \in Y$, on pose $g(y) = x_0$ si $y \in f(X)$ et $g(y) = x$ s'il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$ (dans ce cas x est unique). Alors pour tout $x \in X$, $g(f(x)) = x$ donc $X = g(Y)$. Réciproquement, soit $g \colon Y \to X$ est une surjection. Pour chaque $x \in X$, on choisit $y_x \in g^{-1}(\{x\})$ et on pose $f(x) = y_x$. Si $x \neq x'$, on ne peut pas avoir $y_x = y_{x'}$ car $g(y_x) = x$ et $g(y_{x'}) = x'$. Donc f est injective. □

- Donc X est dénombrable si et seulement si il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur X.
- S'il existe une injection de X dans un ensemble dénombrable, X est dénombrable. S'il existe une surjection d'un ensemble dénombrable sur X, X est dénombrable.

Théorème 1.12. *Les propriétés suivantes sont équivalentes entre elles. Elle peuvent être considérées comme des définitions équivalentes de dénombrabilité.*
- *L'ensemble X s'injecte dans $\mathbb{N}$.*
- *Il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur X*
- *L'ensemble X est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Démonstration. Nous avons déjà vu l'équivalence entre les deux premières assertions. Il reste à montrer que si X s'injecte dans $\mathbb{N}$ alors il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Si X est fini il n'y a rien à montrer. Supposons que X soit infini et posons $A = f(X) \subset \mathbb{N}$. Il suffit de construire une bijection de $\mathbb{N}$ sur A. On définit $g \colon \mathbb{N} \to A$ récurrence. On pose $g(0) = \min A$, puis $g(0), g(1), \ldots, g(n)$ étant définis, on pose

$$g(n+1) = \min\left(A \backslash \{g(0), g(1), \ldots, g(n)\}\right).$$

c'est-à-dire le $n+1$-ième élément de A par ordre croissant. Il est clair que g est strictement croissante (récurrence). Si $a \in A$, il n'y a qu'un nombre fini n d'éléments dans A strictement inférieurs à a et $a = g(n)$. □

Proposition 1.13. *Nous avons les propriétés suivantes.*

1) Tout produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

2) Toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration. Pour 1) Il suffit de montrer l'énoncé pour un produit de deux ensembles et d'itérer. En effet on a

$$X_1 \times X_2 \times \dots X_k = (X_1 \times X_2) \times X_3 \times \dots \times X_k.$$

Si l'un des deux ensembles est fini c'est facile (s'ils sont finis tous les deux c'est évident, et on a une injection de $\{0, \dots, p\} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $(k, n) \mapsto k + n(p + 1)$). Le cas délicat se ramène à montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. On construit une injection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ en posant

$$f(n, m) = \frac{(n + m)(n + m + 1)}{2} + m.$$

Si $n+m = n'+m'$ on voit que $f(n, m) = f(n', m')$ implique $m' = m$, $n' = n$. Si $n + m < n' + m'$, on a :

$$f(n, m) < \frac{(n + m)(n + m + 1)}{2} + m + n + 1$$

$$= \frac{(n + m + 1)(n + m + 2)}{2} \leq \frac{(n' + m')(n' + m' + 1)}{2} \leq f(n', m').$$

La propriété 2) est laissée comme exercice. □

Remarque. Ceci implique que $\mathbb{Q}$ est dénombrable car on a une surjection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$.

Lemme 1.14. *L'ensemble* $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Par contradiction. Supposons que $\phi\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ soit une bijection. Soit $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ défini par $x(n) = 1 - \phi(n)(n)$, c'est-à-dire tel que l'élément x_n de la suite x est différent de l'élément $\phi(n)_n$ de la suite $\phi(n)$ (l'un vaut 0 quand l'autre vaut 1). Alors $x \neq \phi(n)$ pour tout n donc $x \notin \phi(\mathbb{N})$. □

Théorème 1.15. *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration. On peut argumenter comme ci-dessus avec les développements décimaux ou par trichotomie avec les intervalles emboités comme ceci : supposons que $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ soit une bijection. Soit $[a_0, b_0]$ un intervalle ($a_0 < b_0$) ne contenant pas $\phi(0)$. On définit $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ comme l'un des tiers de l'intervalle $[a_0, b_0]$ ne contenant pas $\phi(1)$, puis $[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n]$ étant définis tels que $\phi(i) \notin [a_i, b_i]$, on définit $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ comme un des tiers de $[a_n, b_n]$ ne contenant pas $\phi(n + 1)$. On voit alors que

$$x = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \notin \phi(\mathbb{N})$$

□

1.5 Fonctions réelles

L'un des thèmes de ce cours est l'application des notions de convergence bien au delà de l'ensemble $\mathbb{R}$. En effet on étendra cette notion à des espaces fonctionnels : le premier cas est celui de l'espace des fonctions continues à valeurs réels définies sur un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$. Rappelons tout d'abord la notion de continuité.

Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit x_0 un élément de I. On dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Lemme 1.16 (critère séquentiel)**.** *La fonction f est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si pour toute suite (u_n) de I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.*

Démonstration. Si f est continue en x_0, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = x_0$ implique facilement $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x_0)$. On laisse cette partie comme exercice et on démontre que si f n'est pas continue en x_0 alors il existe une suite dans I qui converge vers x_0 ayant comme image, via f, une suite qui ne converge pas vers $f(x_0)$.

Dire que f n'est pas continue en x_0 revient à dire

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists u \in I, \quad |u - \ell| \leq \delta \text{ et } |f\,(u) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

On prend $\delta = \frac{1}{n+1}$ et on appelle v_n le u trouvé en appliquant la propriété ci-dessus. Clairement, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = u_0$ et $f\,(v_n) \nrightarrow f(x_0)$ quand $n \to +\infty$ car on a toujours $|f\,(v_n) - f(x_0)| > \varepsilon$. $\square$

Théorème 1.17 (théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $y \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.*

Démonstration. On peut supposer $f(a) < y < f(b)$. Soit

$$A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq y\}.$$

L'ensemble A est non vide, majoré donc admet une borne supérieure $c = \sup A$. Par la caractérisation séquentielle de la borne sup, il existe une suite (x_n) de A tendant vers c. Comme $f(x_n) \leq y$ pour tout entier n, la continuité de f en c implique $f(c) \leq y$. Supposons que $f(c) < y$. On a alors $c < b$ et pour $\delta > 0$ assez petit, $c + \delta \leq b$ et par continuité de f en c, $f(c+\delta) < y$ (on prend $\varepsilon = y - f(c) > 0$ et $\delta > 0$ assez petit pour que $f(c+\delta) < f(c) + \varepsilon = y$). On a alors $c + \delta \in A$, contredisant $c = \sup A$. On conclut que $f(c) = y$. Le cas $f(a) > f(b)$ est semblable (exercice). $\square$

On a une formulation à la fois plus générale et plus condensée :

Définition. Un intervalle est une partie $I \subset \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, \ (x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in I).$$

Théorème 1.18 (théorème des valeurs intermédiaires bis)**.** *L'image continue d'un intervalle est un intervalle.*

Démonstration. Exercice. □

Définition. Une fonction $f \colon I \to \mathbb{R}$ est *bornée* si $f(I)$ est minoré et majoré.

Remarque. Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Théorème 1.19. *Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. On montre d'abord que f est bornée, par contradiction. Si f n'est pas bornée, $|f|$ non majorée. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe alors $x_n \in I$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. Par Bolzano-Weierstrass (BW), il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergeant vers $\ell \in [a, b]$. Par continuité de $|f|$ en ℓ, $|f(x_{\phi(n)})|$ converge vers $|f(\ell)|$, une contradiction.

On pose ensuite $A = f([a, b])$ et $m = \sup A$. Par la caractérisation séquentielle de la borne sup, il existe une suite $(y_n) = f(x_n) \in A$ convergeant vers m. Par BW à nouveau, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergeant vers $\ell \in [a, b]$. Par continuité de f, la suite $(y_{\phi(n)}) = (f(x_{\phi(n)}))$ converge vers $f(\ell)$ qui est donc égale à m. Le cas de la borne inférieure est similaire. □

Nous introduisons maintenant la notion de *convergence uniforme.* Les données sont un intervalle I, une suite de fonctions $(f_n) \colon I \to \mathbb{R}$ et une fonction $f \colon I \to \mathbb{R}$.

Définition. On dit que (f_n) converge *simplement* vers f sur I si :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Remarque. On peut inverser le $\forall x$ et le $\forall \varepsilon > 0$ car l'ensemble $]0, +\infty[$ ne dépend pas de x (ça ne marche pas pour $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq x$). En général il est dangereux d'inverser un $\forall$ et un $\exists$ (penser à $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq x$). Ici $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ dépend des variables qui sont avant.

Définition. On dit que (f_n) converge *uniformément* vers f sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ici $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Remarque. La convergence uniforme implique la convergence simple puisqu'on peut prendre $n_0(x, \varepsilon) = n_0(\varepsilon)$.

Exemple. La suite de fonctions (f_n) avec $f_n(x) = x^n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1]$ vers $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(1) = 1$.

Théorème 1.20. *Une limite uniforme de fonctions continues est continue.*

Démonstration. On fixe $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ pour tout $x \in I$ et $n \geq n_0$ (avec la limite uniforme) puis $\delta > 0$ tel que $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$ si $|x - x_0| < \delta$ (avec la continuité de f_{n_0}). Alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ en coupant en trois. □

Contre-exemple. Si on ne suppose pas l'uniformité de la convergence le contre-exemple est fourni par $f_n(x) = x^n$ comme ci-dessus.

Exemple. Il se peut qu'une limite simple et non uniforme d'une suite de fonctions continues soit continue. On peut définir, sur $[0, 1]$, les fonctions f_n affines par morceaux valant 0 en 0, 1 en $\frac{1}{2n}$ et 0 si $x \geq \frac{1}{n}$.

Remarquons que lorsqu'on fixe $x \in [0, 1/2[$ la suite à valeurs réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'exemple ci-dessus est d'abord croissante et puis décroissante. En effet, dans cet exemple, le manque de monotonie des suites $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ joue un rôle crucial. Le théorème suivant montre que lorsque $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissant on ne peut pas construire de telles exemples de limites non uniformes.

Théorème 1.21 (Dini)**.** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné et (f_n) une suite de fonctions continues sur I convergeant simplement vers f continue. Si $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour tout $x \in I$, alors la convergence est uniforme sur I.*

Démonstration. On se ramène à $f = 0$ (en considérant $g_n = f_n - f$ et $g = 0$) et on raisonne par l'absurde. La négation de la condition de convergence uniforme donne $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n_0$, $\exists n \geq n_0$, $\exists x \in I$, $|f_n(x)| \geq \varepsilon$ permet de construire une sous-suite $(f_{\phi(n)})$ et une suite (x_n) telle que $f_{\phi(n)}(x_n) \geq \varepsilon > 0$.

Par BW, il existe une sous-suite $(x_{\psi(n)})$ convergeant vers $\ell \in [a, b]$. Puis pour tout entier $n \geq m$, l'hypothèse de décroissance donne

$$\varepsilon \leq f_{\phi\circ\psi(n)}(x_{\psi(n)}) \leq f_{\phi\circ\psi(m)}(x_{\psi(n)})$$

L'entier m étant fixé on fait tendre n vers $+\infty$ et on utilise la continuité de $f_{\phi\circ\psi(m)}$. On trouve

$$\varepsilon \leq f_{\phi\circ\psi(m)}(\ell)$$

On fait tendre alors m vers $+\infty$ et on trouve $\varepsilon \leq f(\ell) = 0$, d'où la contradiction. $\square$

Remarque. C'est vrai si la suite f_n croit ($f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ pour tout $x \in I$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$).

Contre-exemple. Si on ne suppose pas I fermé borné l'énoncé est faux. On prend $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ affines par morceaux, nulles sur $[0, n]$, égale à 1 sur $[n + 1, \infty[$.

Question. Identifier la partie de la preuve du théorème de Dini où l'hypothèse de continuité de f a été utilisée.

Chapitre 2

Espaces métriques

La notion d'espace métrique sert à étendre la notion de limite, une des notions les plus importantes des mathématiques, à des espaces plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Dans $\mathbb{R}$ on dit que x_n tend vers x si $|x_n - x|$ tend vers 0 (ce qu'on précise avec des $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ldots$). Sur un ensemble E, on va associer à chaque couple (x, y) d'éléments de E un nombre positif $d(x, y) \geq 0$ (la distance de x à y), d obéissant à certains axiomes. On dira que x_n tend vers x si $d(x_n, x)$ tend vers 0. On appellera le couple (E, d) un espace métrique.

2.1 Espaces métriques

Soit E un ensemble.

2.1.1 Distances

Définition. On appelle *distance* sur E une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes suivants : pour tout $x, y, z \in E$

Positivité. Pour tout $x, y \in E$ on a $d(x, y) \geq 0$. On a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

Symétrie. Pour tout $x, y \in E$ on a $d(x, y) = d(y, x)$.

Inégalité triangulaire. Pour tout $x, y, z \in E$ on a

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

On appelle *espace métrique* le couple (E, d).

Exemples

- sur $E = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on définit la distance usuelle par $d(x, y) = |x - y|$ (on note que $|\ |$ est le module dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; utiliser Cauchy-Schwarz pour l'inégalité triangulaire).
- La distance discrète est définie pour tout $x, y \in E$ par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$.
- Si d est une distance sur E, $\min(1, d)$, $\frac{d}{1+d}$ et $\ln(1 + d)$ sont aussi des distances sur E (exercice).

Définition (les distances usuelles sur $E = \mathbb{K}^n$)**.** On définit les distances d_1, d_2 et d_∞ sur $\mathbb{K}^n$ par

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \dots n\}} |x_i - y_i|$$

Exercice. Montrer que ce sont des distances (pour d_2 on a besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Définition (fonctions bornées et distance uniforme)**.** Soit (E, d) et (F, δ) sont deux espaces métriques. On définit

$$\mathcal{B}(E, F) = \{f \colon E \to F \mid \exists y \in F, x \mapsto d(f(x), y) \text{ est bornée}\}$$

l'ensemble des fonctions bornées de E dans F. Alors

$$\sigma(f, g) = \sup_{x \in E} \delta(f(x), g(x))$$

définit une distance sur $\mathcal{B}(E, F)$, appelée *distance uniforme.*

Lemme 2.1 (deuxième inégalité triangulaire)**.** *Sur tout espace métrique (E, d) on a pour tous $x, y, z \in E$:*

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|.$$

2.1.2 Normes

On suppose dans cette section que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition. On appelle *norme* sur E une fonction $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes suivants : Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Positivité. On a $\|x\| \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Homogénéité positive. On a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Sous-additivité. On a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On appelle *espace vectoriel normé* (EVN) le couple $(E, \| \ \|)$.

Définition (les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$)**.** On définit les normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \ldots n\}} |x_i|$$

Définition. Plus généralement on peut définir pour tout réel $p \geq 1$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Quand $p \to \infty$, $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$.

Démonstration. **Exercice à faire en TD.** $\square$

Proposition 2.2. *Si $(E, \| \ \|)$ est un EVN, alors*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

définit une distance sur E, invariante par translation, non bornée si $E \neq \{0\}$.

Démonstration. Evident. La distance est non bornée car pour $x \neq 0$,

$$d(0, nx) = n\|x\| \to +\infty$$

quand $n \to +\infty$. □

Remarque. Une distance bornée (par exemple de la forme $\min(1, d)$ sur E) ne provient donc pas d'une norme.

Proposition 2.3. *Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ on a les inégalités*

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty.$$

Démonstration. La seule subtilité est d'utiliser Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| &= \langle(|x_1|, \ldots, |x_n|, (1, \ldots, 1)\rangle \\ &\leq (\sum |x_i|^2)^{1/2}(\sum 1)^{1/2} = \sqrt{n}\|x\|_2. \end{aligned}$$

□

Définition (norme uniforme)**.** Soit (X, d) un espace métrique, $\| \ \|$ une norme sur E et $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E, c'est-à-dire l'ensemble des $f \colon X \to E$ telles qu'il existe $M_f \geq 0$ tel que $\|f(x)\| \leq M_f$ pour tout $x \in X$. Alors $\mathcal{B}(X, E)$ a une structure d'espace vectoriel donnée par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ et on peut le munir d'une norme définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

dite la *norme uniforme.*

Définition (norme L^p)**.** Soit $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues d'un intervalle fermé $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout réel $p \geq 1$,

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

définit une norme, dite *norme L^p* sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Quand $p \to \infty$, $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$.

Démonstration. **Exercice à faire en TD.** □

2.1.3 Produit scalaires

On suppose dans cette section que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition. On appelle *produit scalaire* une application $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes suivants.

Positivité. $\forall x \in E$, $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Symétrie. $\forall x, y \in E$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

Linearité. $\forall x, y, z \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

On appelle *espace préhibertien* le couple $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Le préfixe “pré” apparaissant dans le mot “préhilbertien” fait référence à l'absence d'une hypothèse particulière : la complétude, qui se révèle indispensable pour de nombreux résultats. Cette propriété sera traitée dans le chapitre 4. Lorsque cette hypothèse est vérifiée, l'espace porte le nom d'espace hilbertien ou d'espace de Hilbert.

Si E est de dimension finie on dit espace euclidien.

Exemple.

- Sur $(\mathbb{R}^n)$ le produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$.
- Sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues d'un intervalle fermé $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on définit un produit scalaire en posant

$$\forall f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \quad \langle f, g\rangle = \int_I fg.$$

Proposition 2.4 (inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Si $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E alors*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2},$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration. Si $\langle x, y\rangle = 0$ c'est vrai. Si $\langle x, y\rangle \neq 0$, le polynôme $P(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$ est de degré 2 et ≥ 0 donc de discriminant $4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$. En cas d'égalité, P admet une racine (double) et $P(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle = 0$ implique $x + ty = 0$. □

Corollaire 2.5. *Si $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E alors on obtient une norme sur E en posant*

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Démonstration. La sous-additivité résulte de

$$\begin{aligned}\langle x + y, x + y\rangle &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. *Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur E et $x, y \in E$. Alors*

1) Pour tous $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

2) Pour tous $x, y \in E$, on a $\langle x, y\rangle = 0$ si et seulement si

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

La première identité est l'*identité du parallélogramme* (ou *de la médiane*), la deuxième est le *théorème de Pythagore*

Remarques.
- Pour $n \geq 2$, sur $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ ne satisfont pas l'identité du parallélogramme. En fait on peut montrer que l'identité 1) caractérise les espaces vectoriels normés qui sont préhilbertiens. **Exercice à faire en TD.**
- On a des inclusions strictes espaces préhilbertiens $\subset$ espaces vectoriels normés $\subset$ espaces métriques. En effet les espaces normés qui ne satisfont pas l'identité du parallélogramme ne sont pas préhilbertiens. De même, les espaces métriques ayants une distance bornée, ne peuvent pas être munis de la structure d'EVN.

2.2 Boules et suites dans un espace métrique

Définition. Dans (E, d) on appelle *boule ouverte* de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B_d(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\}.$$

On appelle *boule fermée* l'ensemble

$$\widetilde{B}_d(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}.$$

On appelle *sphère* de centre $x \in E$ et de rayon $r \geq 0$

$$S_d(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) = r\}$$

Définition. Une application $h : E \to E$ est une homothétie (affine) s'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$, $h(x) - h(y) = \lambda(x - y)$.

Lemme 2.7. *Les boules d'un EVN sont deux à deux homothétiques.*

Démonstration. On envoie $B(x, r)$ sur $B(y, s)$ par $z \mapsto \frac{s}{r}(z - x) + y$. $\square$

Lemme 2.8. *La boule unité fermée d'un espace préhilbertien est strictement convexe : le segment* $[x, y] = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1]\}$ *est inclus dans la boule unité fermée et n'intersecte la sphère unité qu'au bord.*

Démonstration. Ecrire $\langle tx+(1-t)y, tx+(1-t)y\rangle$ pour $x \neq y$ ($\langle x, y\rangle < 1$). $\square$

Exemple. Comparer avec les normes $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$.

Définition. Une partie A d'un métrique (E, d) est bornée si elle est contenue dans une boule.

Remarque. Si $A \subset B(x, r)$, alors pour tout $y \in E$, $A \subset B(y, r + d(x, y))$.

Proposition 2.9. *Une union finie de parties bornées est une partie bornée.*

Démonstration. Si $A_i \subset B(x_i, r_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est inclus dans $B(x_1, r)$ pour $r = \max r_i + d(x_1, x_i)$. $\square$

Définition. Si A est une partie bornée de (E, d), on appelle *diamètre* de A

$$\mathrm{diam} A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

Exercice. Montrer que $\mathrm{diam} B(x, r) \leq 2r$ avec égalité dans un EVN (non réduit à 0).

Définition. Une suite de E est la donnée $x \colon \mathbb{N} \to E$. Notation $x(n) = x_n$, la fonction x est notée (x_n).

Définition. La suite (x_n) converge vers $a \in E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, d(x_n, a) < \varepsilon,$$

qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in B_d(a, \varepsilon).$$

Théorème 2.10. *La limite est unique.*

Démonstration. On raisonne par contradiction. Admettons que a et b sont deux éléments distincts de l'espace métrique (E, d) et que (x_n) converge vers a et vers b. Soit ε la moitié de $d(a, b)$. À compter d'un certain rang tous les termes de la suite appartiennent à la fois à $B(a, \varepsilon)$ et à $B(b, \varepsilon)$. Une contradiction : s'il existe un élément x dans $B(a, \varepsilon) \in B(b, \varepsilon)$, alors

$$2\varepsilon = d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < 2\varepsilon.$$

□

Exemple. Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions bornées de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La suite converge par rapport à la norme $\| \|_\infty$ si et seulement si (f_n) converge uniformément. On voit ici que la norme uniforme $\| \|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme.

Proposition 2.11. *Une suite convergente est bornée.*

Définition. Une *sous-suite* de x c'est $x \circ \phi$ où $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. On dit que $a \in E$ est *valeur d'adhérence* d'une suite (x_n) de E s'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers a dans (E, d).

Proposition 2.12. *Soit (x_n) une suite de (E, d) et $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

– *$a \in E$ est une valeur d'adhérence de x.*
– *$\forall \varepsilon > 0,\ J_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini .*

Démonstration. Exercice, même preuve que dans $\mathbb{R}$. □

Le résultat fondamental de cette partie :

Théorème 2.13 (Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$)**.** *Toute suite bornée de l'espace $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ admet une valeur d'adhérence (au moins).*

Démonstration. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ une suite bornée pour la norme $\| \|_\infty$. En particulier chaque x_i est une suite réelle bornée. Le théorème de BW appliqué à la suite x_1 donne une sous-suite $x_1 \circ \phi_1$ convergeant vers $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. En appliquant BW à $x_2 \circ \phi_1$, on trouve une sous-suite $x_2 \circ \phi_1 \circ \phi_2$ de $x_2 \circ \phi_1$ convergeant vers $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. En itérant on définit pour chaque $i \in \{2, \ldots, n\}$ une sous-suite fo $x_i \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_i$ de $x_i \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_{i-1}$ convergeant vers $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On montre alors que $x \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n$ converge vers $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$. □

Remarques.

– Le théorème de Bolzano-Weierstrass est vrai dans $\mathbb{R}^n$ muni de $\| \|_1$ ou $\| \|_2$ car l'encadrement des normes (proposition 2.3) montre que les suites bornées coïncident ainsi que les suites convergentes.
– On va voir un peu plus loin que le théorème est vrai dans tout EVN de dimension finie : d'une part parce qu'un espace vectoriel (réel) de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{R}^n$; d'autre part parce toute norme est comparable à la norme $\| \|_\infty$ comme ci-dessus.
– On verra beaucoup plus loin que ce théorème caractérise parmi les espaces vectoriels normés ceux qui sont de dimension finie.

Contre-exemple. On considère $E = C([0,1],\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension infinie mini de la norme uniforme $\| \|_\infty$. On considère les fonctions f_n affines par morceaux, égales à 1 en 0 et 0 si $x \geq 1/n$. Si une sous-suite converge, la limite est la fonction f qui vaut 1 en 0 et 0 sur $]0,1]$. Or elle n'est pas continue. Il est donc impossible que (f_n) admette une suite extraite convergente par rapport à $\| \|_\infty$. Si c'était le cas la limite serait f, qui n'est pas continue, tandis que la convergence uniforme (la convergence dans la norme $\| \|_\infty$) préserve la continuité.

Exercice. Montrer que $C([0,1],\mathbb{R})$ est de dimension infinie.
Donner des contre-exemples à BW dans $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\| \|_1$ ou de $\| \|_2$.

2.3 Fonctions continues

Définition. La fonction $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, d(x,x_0) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in B_d(x_0,\eta) \Longrightarrow f(x) \in B_\delta(f(x_0), \varepsilon).$$

et aussi à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, B_d(x_0,\eta) \subset f^{-1}(B_\delta(f(x_0),\varepsilon)).$$

La dernière écriture, peu intuitive, est cependant très efficace en certaines occasions.

Théorème 2.14 (Critère séquentiel)**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. La fonction f est continue en x_0.

ii. Pour toute suite (x_n) de (E, d) convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge dans (F, δ) vers $f(x_0)$.

iii. Pour toute suite (x_n) de (E, d) convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge dans (F, δ).

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est classique. L'implcation $(ii) \Rightarrow (iii)$ est évidente. Enfin non (i) implique non (iii). On trouve $\varepsilon > 0$ et une suite (x_n) convergeant vers x_0 telle que $\delta(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Il se pourrait que $(f(x_n))$ converge. On définit alors (y_n) en posant $y(2n) = x_n$ et $y(2n+1) = x_0$. Cette suite converge vers x_0 mais $(f(y_n))$ ne converge pas : la sous-suite $(f(y_{2n+1})$ converge vers $f(x_0)$, qui est donc la seule limite possible pour la suite ; or $(f(y_{2n}))$ ne converge pas vers $f(x_0)$. □

Définition. Une fonction $f : (E, d) \to (F, \delta)$ est continue sur $A \subset E$ si elle est continue en tout point $x_0 \in A$.

On mentionne au passage une condition plus de continuité plus forte : la continuité uniforme.

Définition. La fonction $f : (E, d) \to (F, \delta)$ est uniformément continue sur $A \subset E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_0 \in A, B_d(x_0, \eta) \subset f^{-1}(B_\delta(f(x_0), \varepsilon)).$$

Autrement dit η ne dépend pas de x_0. Clairement, la continuité uniforme sur A entraine la continuité sur A.

Définition. Soit k un nombre réel positif. On dit que $f : (E, d) \to (F, \delta)$ est lipschitzienne de constante $k \in \mathbb{R}$ (ou k-lipschitz) si pour tout $x, y \in E$,

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y)$$

Remarque. Les fonction k-lipschitziennes sont uniformément continues (si $k = 0$ elles sont constantes. Sinon on pose $\eta = \varepsilon/k$). En particulier, elle sont évidemment continues.

Exemples.
- Les applications constantes de (E, d) dans (F, δ), l'application identité de (E, d) dans (E, d).
- La norme d'un EVN dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitz.
- Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto d(x, y)$ est 1-lipschitz de (E, d) dans $\mathbb{R}$.

– Pour toute partie $A \subset E$ non vide, l'application
$$x \mapsto d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$$
est 1-lipschitz.
– La fonction évaluation : pour $a \in [0, 1]$,
$$\begin{aligned} e_a \colon (C([0,1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty) &\to (\mathbb{R}, us) \\ f &\mapsto f(a) \end{aligned}$$
est 1-lipschitz.
– Toute $f \colon (\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty) \to (F, \| \ \|_F)$ linéaire est lipschitzienne donc continue. On verra plus tard que c'est vrai si $(E, \| \ \|_E)$ est de dimension finie et faux en général sinon.

Proposition 2.15. *Si $f, g \colon (E, d) \to (F, \delta)$ sont continues en x_0, alors on a les propriétés suivantes.*

i. *Si F est un EVN, $f + g$ et λg sont continues en x_0.*

ii. *Si $(F, \delta) = (\mathbb{K}, | \ |)$, fg en continue en x_0. Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors f/g est continue en x_0.*

iii. *Si $h : (F, \delta) \to (G, \rho)$ est continue en $f(x_0)$ alors $h \circ f \colon (E, d) \to (G, \rho)$ est continue en x_0.*

Démonstration. Evident avec des suites. □

Voici deux applications :
– si $P \in \mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$ est un polynôme à n variables à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors P est continu de $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}, | \ |)$.
– L'application déterminant de $(M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2}, \| \ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}, | \ |)$ est continue.
Rappel : si $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, alors
$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} \cdots m_{n\sigma(n)}$$
où σ décrit les permutations de $\{1, \cdots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ est la signature de σ.

Soit A une partie d'un espace métrique (E, d).

Définition. On appelle *distance induite* par d sur A l 'application

$$\begin{aligned} d_A \colon A \times A &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

Remarque. Pour $x \in A$, $B_{d_A}(x,\varepsilon) = B_d(x,\varepsilon) \cap A$.

Exemple. Pour $A = [0,1)$, $B_{d_A}(0,1/2) = [0,1/2)$ est une boule ouverte de (A, d_A).

Remarque. L'inclusion

$$\begin{aligned} i_A \colon (A, d_A) &\to (E,d) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

est 1-lipschitz.

Proposition 2.16 (restriction à la source et au but)**.** *Soit $f \colon (E,d) \to (F,\delta)$ continue, $A \subset E$ et $B \subset F$ tel que $f(E) \subset B$. Alors*
1) La restriction $f_{|A} : (A, d_A) \to (F,\delta)$ est continue.
2) L'application $f \colon (E,d) \to (B,\delta_B)$ est continue.

Démonstration. Pour 1) on écrit $f_{|A} = f \circ i_A$. pour 2) on écrit que $f(B_d(x,\eta)) \subset B_\delta(f(x),\varepsilon) \cap B = B_{\delta_B}(f(x),\varepsilon)$ avec les $\forall$ et les $\exists$ au bon endroit. □

Remarque. Si f et A sont choisis arbitrairement la continuité de $f_{|A}$ ne dit rien sur la continuité de f, y compris en un point $x \in A$.

Exemple. La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, $f = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$, qui vaut 1 sur les rationnels et 0 ailleurs, est continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ($f_{\mathbb{Q}}$ est continue car constante) mais n'admet aucun point de continuité sur $\mathbb{R}$.

2.4 Parties denses

Définition. Une partie A de (E,d) est *dense* si tout $x \in E$ est limite d'une suite de A.

Exemple. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice. Les fonctions nulles en 0 forment une partie dense dans $(C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_1$ mais pas pour la norme $\| \ \|_\infty$.

Proposition 2.17. *Soit $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ continue et surjective. Soit $A \subset (E,d)$ une partie dense. Alors $f(A)$ est dense dans (F,δ).*

Théorème 2.18 (fondamental)**.** *Soit $f,g\colon (E,d) \to (F,\delta)$ continues. Si $f = g$ sur une partie dense de E alors $f = g$ sur E.*

Démonstration. On prend des suites et cela marche tout seul. □

Corollaire 2.19. *Toute application $f\colon (\mathbb{R}, us) \to (\mathbb{R}, us)$ continue, telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, est linéaire.*

Démonstration. On montre que $f(-x) = -f(x)$ puis par récurrence que $f(px) = pf(x)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. On a alors pour rationnel p/q, $f(p) = f(\frac{p}{q}q) = f(\frac{p}{q})q$ d'où $f(\frac{p}{q}) = \frac{f(p)}{q} = \frac{p}{q}f(1)$. On conclut en utilisant la continuité de f et de $x \mapsto xf(1)$ et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ que $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

Exercice. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est dense dans $(M_n(\mathbb{R}), \| \, \|_\infty)$.

2.5 Espaces produits

Dans cette section, $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques, et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ le produit cartésien.

Définition. On appelle *distance produit* sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ la distance définie par

$$d(x,y) = \max\{d_i(x_i, y_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Remarque. $\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$ et $\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}$ définissent aussi des distances. Sauf mention contraire, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ sera toujours muni de la distance produit.

Les résultats suivants sont élémentaires.

Proposition 2.20. *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ et $r > 0$. Alors on a*

$$B_d(x,r) = B_{d_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, r).$$

Théorème 2.21. *Une suite de $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ converge si et seulement si ses composantes convergent.*

Proposition 2.22. *Soit $A_1 \subset E_1, \ldots, A_n \subset E_n$. Alors $A_1 \times \cdots \times A_n$ est dense dans E si et seulement si chaque A_i est dense dans E_i.*

Remarque. La projection de $E = E_1 \times \cdots \times E_n, d$ dans E_i est 1-lipschitz.

Proposition 2.23. *Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon (X, \delta) \to E = E_1 \times \ldots \times E_n$. Alors f est continue si et seulement les applications composantes f_i sont continues.*

Exemple. $f\colon (\mathbb{R}, us) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ donnée par $f(x) = (cos(x), sin(x))$.

Définition. Soit $f\colon E = E_1 \times \ldots \times E_n \to F$. Fixons i et $a_j \in E_j$ pour tout $j \neq i$. Alors ces donnés déterminent l'*application partielle* de E_i dans F

$$x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

Autrement dit, soit χ l'application $x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$; alors l'application partielle associé à $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ est la composée $f \circ \chi$.

Proposition 2.24. *Si $f\colon E = E_1 \times \ldots \times E_n \to (F, \delta)$ est continue, ses applications partielles le sont.*

Démonstration. Il s'agit de voir que l'injection χ est continue. Soit $\varepsilon > 0$ on cherche $\eta > 0$ tell que

$$\chi(B_{d_i}(x_i, \eta)) \subset B_d(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n), \varepsilon).$$

En effet, il suffit de poser $\eta = \varepsilon$. Il s'agit de rappeler la définition de distance d sur E qui donne

$$d\big((a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n), (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\big) = d_i(x, x_i).$$

□

2.6 Équivalences entre distances

Définition. Une application $f\colon (E, d) \to (F, \delta)$ est un *homéomorphisme* si elle est bijective, continue et si f^{-1} est continue.

Remarque. La composée de deux homéomorphismes est un homéomorphisme. Etre homéomorphe définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces métriques.

Exemples.

- La fonction $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ définit un homéomorphisme de réciproque $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.

Proposition 2.25. *L'espace métrique* $\mathbb{R}$ *n'est pas homéomorphe à l'espace métrique* $[0,\infty)$.

Démonstration. On raisonne par contradiction. On se ramène à un homéomorphisme $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tel que $f(0) = 0$ et $f(1) > 0$. On montre alors que $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$: sinon il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) < 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires entre x_0 et 1 implique l'existence de y entre x_0 et 1 tel que $f(y) = 0 = f(0)$ — une contradiction. □

Exercice. Déterminer les classes d'équivalence sur l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 2.26. *L'espace métrique* S^1 *avec la métrique induite par l'inclusion dans* $\mathbb{R}^2$ *n'est homéomorphe à aucun intervalle de* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Notons $N = (0,1)$ le pôle nord de S^1. Observons d'abord que $S^1 \setminus \{N\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$: la projection stéréographique $f(x,y) = \frac{x}{1-y}$ définit un homéomorphisme de réciproque $f^{-1}(r) = (\frac{2r}{1+r^2}, 1 - \frac{2}{1+r^2})$. Supposons alors que $g\colon S^1 \to I$ soit un homéomorphisme entre S^1 et un intervalle I de $\mathbb{R}$. On peut supposer que $g(N)$ n'est pas sur le bord de l'intervalle (quitte à composer au départ g avec une rotation), donc $I \setminus \{g(N)\}$ est une réunion de 2 intervalles disjoints. Or

$$g_{S^1\setminus\{N\}}\colon S^1 \setminus \{N\} \longrightarrow I \setminus \{g(N)\}$$

est un homéomorphisme donc $g \circ f^{-1}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $I - g(N) \subset \mathbb{R}$. Or l'image continue de $\mathbb{R}$ doit être un intervalle de $\mathbb{R}$, d'où la contradiction. □

Lemme 2.27. *Dans un EVN, toute boule ouverte est homéomorphe à* E.

Démonstration. On considère l'application $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ de E dans $B(0,1)$, de réciproque $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-\|y\|}$. □

Définition (equivalence entre distances)**.** On dit que deux distances d et d' sur un ensemble E sont *topologiquement équivalentes* si l'application identité de (E,d) dans (E,d') est un homéomorphisme.

Remarque.

- Si $\mathcal{D}$ est une collection de distances sur un ensemble E, l'équivalence topologique est une relation d'équivalence sur $\mathcal{D}$.
- Visuellement, cela dit que les boules de (E, d) et de (E, d') s'emboitent les unes dans les autres : pour tout $x \in E$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } B_d(x, \eta) \subset B_{d'}(x, \varepsilon)$$

  et inversement.

Exemples.
- d et $d' = \min(1, d)$ sont topologiquement équivalentes vu que $B_d(x, \varepsilon)$ coïncide avec $B_{d'}(x, \varepsilon)$ pour tout $0 < \varepsilon < 1$. De même, d et $\frac{d}{1+d}$ sont topologiquement équivalentes.
- Sur $C([0, 1], \mathbb{R})$, les distances induites par les normes $\| \|_\infty$ et $\| \|_1$ ne sont pas topologiquement équivalentes. En effet la suite (f_n) de E où f_n est affine par morceaux, vaut 1 en 0 et 0 sur $[1/n, 1]$ converge pour $\| \|_1$ mais pas pour $\| \|_\infty$. La présence d'une suite convergeant par rapport à une distance et non convergeant par rapport à l'autre suffit grâce aux propriétés suivantes.

Proposition 2.28. *Soient d et d' deux distances sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. Les distances d et d' sont topologiquement équivalentes

ii. Les espaces (E, d) et (E, d') ont les mêmes suites convergentes.

iii. Pour tout espace métrique (F, δ), les fonctions continues de (E, d) dans (F, δ) et de (E, d') dans (F, δ) sont les mêmes.

iv. Pour tout espace métrique (F, δ) les fonction continues de (F, δ) dans (E, d) et de (F, δ) dans (E, d') sont les mêmes.

Démonstration. l'équivalence de (1) et (2) se montre avec le critère séquentiel, celle de (1) avec (3) et (4) en composant par l'identité au bon endroit. □

Définition. on dit que deux distances d et d' sur E sont *équivalentes* s'il existe des constantes $a, b > 0$ telles que

$$ad(x, y) \leq d'(x, y) \leq bd(x, y),$$

pour tout $x, y \in E$.

Exemples.

- Sur $\mathbb{R}^n$, les distances d_1, d_2, d_∞ sont équivalentes car
$$\frac{d_1}{n} \leq d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq \sqrt{n} d_2 \leq n d_\infty.$$
- Sur (E, d), si d est non bornée, d et $\min(1, d)$ sont topologiquement équivalentes mais pas équivalentes.

Remarque. Si d et d' sont équivalentes, elles ont les mêmes parties bornées (faux avec l'équivalence topologique seule).

On se situe dans le cadre des EVN. On considère des normes sur un espace vectoriel E et les distances associées. On dira que les normes sont topologiquement équivalentes ou bien simplement équivalentes au sens précisé ci-dessus si les distances associées le sont.

Remarque. Il suffit de vérifier ces propriétés en 0. En effet deux normes $\| \|$ et $\| \|'$ sont équivalentes si et seulement si il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $x \in E$,
$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$$
L'homogénéité et l'invariance par translation de ces distances induisent à penser que les deux notions d'équivalence coïncident sur les EVN. Effectivement on a le théorème 2.29 ci-dessous.

Exercice. Afin de mieux comprendre les preuves qui suivent il convient de bien maitriser les inégalités entre normes qu'on vient de donner. Clairement l'existence de $a > 0$ tel que $a\|x\| \leq \|x\|'$ pour tout x équivaut à l'existence de $a' > 0$ tel que $\|x\| \leq a'\|x\|'$ (il suffit de prendre $a' = 1/a$). Démonter que si une suite converge vers une limite donné ℓ par rapport à la norme $\| \|'$, alors elle converge vers la même limite ℓ par rapport à la norme $\| \|$. Donner aussi une caractérisation en terme de boules de la relation $a\|x\| \leq \|x\|'$; montrer que cela revient à dire que toute boule par rapport à la norme $\| \|'$ est contenue dans une boule du même centre par rapport à la norme $\| \|$. Remarquer comment cette implication inverse l'ordre de l'inégalité $a\|x\| \leq \|x\|'$. De même dans la preuve qui suit on montre comment la continuité de l'application identité de $(E, \| \|')$ vers $(E, \| \|)$ entraine $a\|x\| \leq \|x\|'$.

Théorème 2.29. *Soient $\| \|$ et $\| \|'$ deux normes topologiquement équivalentes sur un espace vectoriel E. Alors elles sont équivalentes.*

Démonstration. Par continuité en 0 de l'application identité de $(E, \| \|')$ dans $(E, \| \|)$ il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x\|' \leq \eta$ alors $\|x\| \leq 1$. Soit alors $x \in E \setminus \{0\}$. Clairement $\| \eta \frac{x}{\|x\|'} \|' = \eta$, donc on a $\| \eta \frac{x}{\|x\|'} \| \leq 1$. On en déduit que pour tout x de E
$$\|x\| \leq \frac{1}{\eta} \|x\|'.$$

L'autre inégalité s'obtient de la même façon. □

Voici maintenant un résultat fondamental.

Théorème 2.30. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors les normes sur E sont toutes équivalentes.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas des espaces vectoriels réels. On se donne une norme de référence $\| \ \|_\infty$ sur E en choisissant une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E et en posant pour $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, $\|x\|_\infty = \max_i |\lambda_i|$. Alors l'application

$$\phi\colon (E, \| \ \|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$$

définie par $\phi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est un isomorphisme et on a $\|\phi(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$. On en déduit que $(E, \| \ \|_\infty)$ satisfait la conclusion du théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 2.13). On considère alors une norme quelconque $\| \ \|$ sur E. On a pour tout $x \in E$ l'inégalité

$$\|x\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\| \right) \|x\|_\infty. \tag{2.1}$$

On rappelle que ceci signifie qu'une suite qui converge vers un élément x donné par rapport à la norme $\| \ \|_\infty$, converge vers le même élément x par rapport à $\| \ \|$.

L'autre inégalité s'obtient par contradiction : la négation de

$$\exists a > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, a\|x\|_\infty \leq \|x\|$$

donne une suite (x_m) telle que $\|x_m\|_\infty / m > \|x_m\|$. En posant $y_m = \frac{x_m}{\|x_m\|_\infty}$ (car $\|x_m\|_\infty > 0$) on a $\|y_m\|_\infty = 1$ et $\|y_m\| \to 0$. D'une part (y_m) converge vers 0 dans $(E, \| \ \|)$ et, grâce à (2.1), aussi dans $(E, \| \ \|_\infty)$ (faire l'exercice qui précède cette preuve). D'autre part, par BW, quitte à extraire, (y_n) converge dans $(E, \| \ \|_\infty)$ vers y de norme 1 donc $y \neq 0 \in E$. Ceci contredit l'unicité de la limite.

Dans le cas d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on se donne une isométrie vers $(\mathbb{C}^n, \| \ \|_\infty)$. Comme $(\mathbb{C}, | \ |)$ satisfait BW (il est isométrique à $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_2)$), $(\mathbb{C}^n, \| \ \|_\infty)$ aussi (voir preuve du th. 2.13). □

Remarque. L'hypothèse dimension finie est primordiale : les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ sur $C([0,1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

Corollaire 2.31. *Tout EVN de dimension finie satisfait la conclusion du théorème de Bolzano-Weierstrass.*

Démonstration. On a vu dans la preuve ci-dessus que tout espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme le rendant isométrique à $(\mathbb{K}^n, \| \|_\infty)$. Il satisfait BW pour cette norme, et donc pour toutes par le théorème 2.30. $\square$

Exercice. Montrer que si la sphère unité de $(E, \| \|)$ satisfait la conclusion de BW, alors $(E, \| \|)$ aussi.

Remarque. Cette propriété, appelée *compacité de la sphère unité*, caractérise parmi les EVN ceux de dimension finie (voir le théorème de Riesz au chapitre 5).

2.7 Applications linéaires continues

Notation. Soit $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $f\colon E \to F$ linéaire. On note $L(E,F)$ (resp. $L_c(E,F)$) l'espace vectoriel des applications linéaires (resp. linéaires continues) de E dans F.

Proposition 2.32 (caractérisation fondamentale)**.** *Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) *La fonction f est continue sur E.*
2) *La fonction f est continue en $0 \in E$.*
3) *La fonction f est bornée sur la boule unité fermée de E.*
4) *Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$,*

$$\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

5) *La fonction f est lipschitzienne, c'est-à-dire il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in E$,*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq M\|x - y\|_E.$$

6) *La fonction f est uniformément continue.*

Démonstration. Il est claire que (1) implique (2). D'autre part la continuité en 0 implique, pour $\varepsilon = 1$ l'existence de $\eta > 0$ tel que $f(B(0,\eta)) \subset B(0,1)$. On a

$$\eta^{-1} f(B(0,\eta)) \subset \eta^{-1} B(0,1)$$

donc

$$f(B(0,1)) \subset B(0,\eta^{-1}) \qquad \text{(condition (3))}.$$

Enfin, si f est bornée sur la boule unité, alors pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\|f\left(x(\|x\|_E + \varepsilon)^{-1}\right)\|_F < M.$$

Par linéarité on déduit

$$\|f(x)\|_F < M(\|x\|_E + \varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. La condition (4) suit immédiatement (la déduire par contradiction).

La condition (5) n'est que la condition (4) appliquée à $x-y$. Les conditions (5) et (6) sont équivalentes par la définition même de fonction lipschitzienne (noter que cette preuve indique que la borne M ci-dessus est la constante optimale).

La continuité uniforme suit de la lipschitziennité et entraine la continuité. $\square$

Exercice. Si f est bornée sur une boule, alors f est continue.

Théorème 2.33. *Si E est de dimension finie, alors $L(E, F)$ est égal à $L_c(E, F)$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.32 il s'agit de démontrer que f satisfait l'une des conditions (1), ..., (6) ci-dessus. On démontre que f est bornée sur la boule unité fermée (condition (3)).

Si E à une base $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n \in E$ on peut établir un isomorphisme

$$\begin{aligned} E &\to \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i &\mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

Via cet isomorphisme la norme $\| \ \|_\infty$ définie sur $\mathbb{R}^n$ induit un norme $\| \ \|_{E,\infty}$ sur E

$$\|\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{e}_i\|_{E,\infty} = \max_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

Sans perte de généralité on peut admettre que E est muni de la norme $\| \ \|_{E,\infty}$. En effet, la norme $\| \ \|_E$ est équivalente à $\| \ \|_{E,\infty}$. Ainsi, la boule unité par rapport à la norme $\| \ \|_E$ est contenue dans une bulle $B(0, \eta)$ de centre 0 et rayon $\eta > 0$ dans $\| \ \|_{E,\infty}$. Or, les boules $B(0, \eta)$ et $B(0, 1)$ par rapport à la norme $\| \ \|_{E,\infty}$ sont liées par $B(0, \eta) = \eta B(0, 1)$; donc, si M est un majorant de $\{\|f(x)\|_F \mid x \in B(0, 1)\}$, alors ηM est un majorant de $\{\|f(x)\|_F \mid x \in B(0, \eta)\}$.

Maintenant, le fait que f est bornée sur la boule unité par rapport à la norme $\| \ \|_{E,\infty}$ est immédiat. On considère un élément de E de la forme $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \boldsymbol{e}_i$ pour $|\lambda_i| < 1$ pour tout i (la norme $\| \ \|_{E,\infty}$ est inférieure à 1). On a

$$\|f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \boldsymbol{e}_i\right)\|_F = \|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(\boldsymbol{e}_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\|f(\boldsymbol{e}_i)\|_F < \sum_{i=1}^{n}\|f(\boldsymbol{e}_i)\|_F.$$

On pose $M = \sum_{i=1}^{n}\|f(\boldsymbol{e}_i)\|_F$ et on obtient la propriété (6) ci-dessus. □

Exemple. Il est aisé de voir que L_c est strictement contenu dans L lorsque E est un espace de dimension infinie. On considère par exemple l'application linéaire non continue T de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_1)$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $T(f) = f(0)$. On considère $f_n(x)$ égale à $-nx+1$ sur $[0,1/n]$ et 0 sur $[1/n,1]$. On remarque que (f_n) converge vers une fonction g (la fonction nulle) et que la suite $(T(f_n))$ dans $\mathbb{R}$ ne converge pas vers $T(g)$.

Remarque. Une fonction linéaire qui est aussi continue satisfait une (et automatiquement toutes) les propriétés (1),. . .,(6) de la proposition 2.32 ci-dessus. En particulier la fonction

$$x \mapsto \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

est bornée. Cela permet de formuler la définition suivante.

Définition. Pour $f \in L_c(E,F)$, on définit

$$\|f\| = \|f\|_{E,F} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

En particulier, pour tout $x \in E$, on a

$$\|f(x)\|_F \leq \|f\|\|x\|_E.$$

Remarque. On écrit simplement $\|f(x)\|$ et $\|x\|$ au lieu de $\|f(x)\|_F$ et $\|x\|_E$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 2.34. *Pour tout $f \in L_c(E,F)$, on a*

$$\|f\| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|f(x)\|.$$

et

$$\|f\| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|f(x)\|.$$

Démonstration. Nous avons clairement des inégalité de type $\geq$ entre les trois termes (noter que diviser par $\|x\|$ lorsque x est différent de zéro et contenu dans la boule unité reviens à multiplier par un facteur supérieur ou égal à 1).

D'autre part $\|\|f\|\|$ peut-être vu comme la borne supérieure des normes des valeurs atteints par la fonction f sur les éléments de norme 1 de la forme $x/\|x\|$. On a automatiquement les inégalités de type $\leq$. □

Proposition 2.35. *La fonction $f \mapsto \|\|f\|\|$ est une norme sur $L_c(E, F)$.*

Démonstration. Si f appartient à $L_c(E, F)$ et λ appartient à $\mathbb{R}$, alors

$$\|\|\lambda f\|\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|\lambda f\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\lambda| \|f\| = |\lambda| \|\|f\|\|.$$

Si f, g appartiennent à $L_c(E, F)$, alors

$$\|\|f + g\|\| \leq \|\|f\|\| + \|\|g\|\|.$$

En effet $\|(f + g)(x)\| \leq \|\|f\|\| \|x\| + \|\|g\|\| \|x\|$.

Si on a $\|\|f\|\| = 0$, alors $\forall x \in E \setminus \{0\}$ on a

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0,$$

donc $\forall x \in E \setminus \{0\}$ on a $f(x) = 0$. Cela revient à dire $f = 0$. □

Remarque. Si E est de dimension finie, la borne supérieure

$$\|\|f\|\| = \sup \{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}$$

est atteinte. An appliquant la caractérisation de la borne supérieure on définit une suite d'éléments de $\{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}$ qui converge vers $\|\|f\|\|$. Autrement dit, on définit une suite (x_n) a valeurs dans la boule unité telle que $(\|f(x_n)\|)$ tend vers $\|\|f\|\|$. Alors, le fait que la borne supérieure est atteinte $\|\|f\|\|$ découle du théorème de Bolzano–Weierstrass pour la boule unité dans $(E, \| \|)$. Quitte à considérer une suite extraite (y_n) on a une suite qui converge vers ℓ. Il est facile de voire (en appliquant la continuité de la norme et l'unicité de la limite) que

$$\|f(\ell)\| = \|\|f\|\|.$$

Remarque. On note le rôle joué par BW dans la remarque ci-dessus. Comme on l'a déjà mentionné, BW caractérise les EVN de dimension finie (voir le théorème de Riesz au chapitre 4). Si E a dimension infinie on peut facilement fournir un contre-exemple. On considère E le sous-espace vectoriel de $C([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions nulles en zéro, muni de la norme infini. On pose

$$\begin{aligned} T\colon E &\to \mathbb{R}, \\ f &\mapsto \int_0^1 f(t)\ dt. \end{aligned}$$

La fonction T est continue, on a $\|T\| = 1$ mais $|T(f)| < 1$ sur la boule unité.

En effet, cette dernière inégalité est facile à voir. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. La continuité de f et la condition $f(0) = 0$ entraine l'existence d'un intervalle de la forme $[0,\eta[$ pour $\eta > 0$ ou les valeurs de $|f|$ sont contenus dans $[0,\varepsilon[$ sur l'intervalle $[0,\eta[$ et dans $[0,1]$ ailleurs (1 est un majorant de l'image de f, élément de la boule unité).

Quant à $\|T\| = 1$, nous pouvons définir une suite de fonctions ($f_n \in E$) de norme infini $\|\ \|_\infty$ inférieure à 1 telles que $(T(f_n))$ est une suite de nombres réels qui tend vers 1. Il suffit de considérer les fonctions affines par morceaux égales à 1 sur $]1/n,1]$ et égales à $x \mapsto nx$ sur $[0,1/n]$.

Lemme 2.36. *Si E,F,G sont trois EVN, $f \in L_c(E,F)$, $g \in L_c(F,G)$ alors $g \circ f$ appartient à $L_c(E,G)$ et on a*

$$\|g \circ f\| \leq \|f\|\|g\|.$$

Démonstration. La composée d'applications continues est continue. De plus pour tout $x \in E$ on a

$$\|g \circ f(x)\| \leq \|g\|\|f(x)\| \leq \|g\|\|f\|\|x\|.$$

□

2.8 Formes linéaires

Définition. On appelle *forme linéaire* $\phi \in L(E,\mathbb{R})$ et *forme linéaire continue* $\phi \in L_c(E,\mathbb{R})$. On appelle

$$E^* = L(E,\mathbb{R}) \quad \text{le } \textit{dual algébrique}$$

et

$$E' = L_c(E,\mathbb{R}) \quad \text{le } \textit{dual topologique}.$$

Comme nous l'avons illustré dans la section précédente, ces deux notion coïncident lorsque E a dimension finie. Dans cette section nous fournissons une caractérisation des formes linéaires continues (encore plus géométrique que celle déjà donnée dans la proposition 2.32).

La notion essentielle est celle de noyau d'une forme ϕ, c'est à dire le sousespace de E

$$\ker(\phi) = \{x \in E \mid \phi(x) = 0\}.$$

Définition. Un hyperplan d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel H tel que E s'écrit comme somme directe de H et d'un sous-espace vectoriel de dimension 1 :

$$E = H \oplus \mathbb{R}a,$$

où $a \in E \backslash \{0\}$.

Exercice. On rappelle la notion de partie dense. Une partie A de E est dense losque pour tout $b \in E \setminus H$ il existe une suite dans A qui converge vers b. Démontrer qu'il est équivalent d'imposer que pour tout b comme ci-dessus on à que $A \cap B(b, \varepsilon) \neq \varnothing$. Démontrer qu'il est équivalent d'imposer que pour tout b comme ci-dessus $d(b, A) = 0$ (on rappelle que $d(b, A) = \inf_A d(x, a)$).

Exercice. Si H est un hyperplan, pour tout $b \in E \backslash H$ on a $E = H \oplus \mathbb{R}b$.

Théorème 2.37. *On a les propriétés suivantes.*

i. Si $\phi \colon E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle, $\ker \phi$ *est un hyperplan.*

ii. En général, un hyperplan H d'un EVN est soit dense soit pour tout $b \in E \setminus H$ il existe une boule $B(b, \varepsilon)$ entièrement contenue dans $E \setminus H$ (disjointe de H).

iii. Une forme linéaire non nulle ϕ est continue si et seulement si $\ker(\phi)$ *n'est pas dense ; autrement dit, si et seulement si pour tout $b \in E \setminus \ker \phi$ il existe une boule $B(b, \varepsilon)$ disjointe de* $\ker \phi$.

Démonstration. Si $\phi(a) \neq 0$ alors tout $x \in E$ s'écrit $x = x - \frac{\phi(x)}{\phi(a)} a + \frac{\phi(x)}{\phi(a)} a$ d'oú $E = \ker \phi \oplus \mathbb{R}a$.

Soit

$$\overline{H} = \{b \in E \mid \forall \varepsilon \quad B(b, \varepsilon) \cap H \neq \varnothing\}.$$

L'espace ci-dessus est un sous-espace vectoriel. L'énoncé (ii) dit que soit $\overline{H} = E$ (densité) soit $\overline{H} = H$. En effet admettons $\overline{H} \neq H$. Alors soit $a \in \overline{H} \setminus H$. Comme H est un hyperplan on a $E = H \oplus \mathbb{R}a \subset \overline{H}$ d'où $\overline{H} = E$ et H est dense dans E.

Si ϕ est continue, on considère $b \notin \ker \phi$. Alors soir $\varepsilon = |\phi(b)|$; il existe η tel que $f(B(b,\eta)) \subset]0, 2\phi(b)[= B(\phi(b), \varepsilon)$. Par conséquence la boule $B(b,\eta)$ est disjointe du noyau $\ker \phi$.

Réciproquement, supposons $\ker \phi$ non dense et différent de E. Considérons $a, x \in E \setminus \ker \phi$. En écrivant $x = x - \frac{\phi(x)}{\phi(a)}a + \frac{\phi(x)}{\phi(a)}a = x' + \frac{\phi(x)}{\phi(a)}a$ avec $x' \in \ker \phi$, il vient

$$d(x, \ker \phi) \leq d(x, x') = \|\frac{\phi(x)}{\phi(a)}a\| = |\frac{\phi(x)}{\phi(a)}|\|a\|,$$

Comme $\ker \phi$ est fermé, on a $d(x, \ker \phi) > 0$ d'où

$$|\phi(a)| \leq \frac{|\phi(x)|}{d(x, \ker \phi)}\|a\|. \tag{2.2}$$

qui est valable maintenant pour tout $a \in E$. On en déduit la continuité. □

On donnera dans au début du prochain chapitre une reformulation de ce théorème : voir le théorème 3.1.

Proposition 2.38. *Pour tout $x \in E$,*

$$|\phi(x)| = \|\phi\| d(x, \ker \phi).$$

Démonstration. Grâce à (2.2) on a

$$\|\phi\| \leq \frac{|\phi(x)|}{d(x, \ker \phi)}.$$

On en déduit que $|\phi(x)| \geq \|\phi\| d(x, \ker \phi)$, pour tout $x \in E$. Pour l'autre inégalité, on prend (x_n) dans $\ker \phi$ telle que $d(x, x_n)$ converge vers $d(x, \ker \phi)$. Alors

$$|\phi(x)| = |\phi(x - x_n)| \leq \|\phi\| \|x - x_n\|$$

et on passe à la limite. □

Chapitre 3

Topologie générale

Dans ce chapitre on aborde une nouvelle notion, celle de *partie ouverte*. On peut la voir comme une abstraction de la notion de boule ouverte, où on oublie l'aspect métrique et on ne retient que l'idée d'ouvert. Cette notion permet de parler de convergence, de continuité, de densité, et de beaucoup de concept introduits dans des espaces métriques sans faire apparaitre la distance. Ces définitions font alors sens dans des espaces très généraux, pas forcément métriques, s'ils sont munis d'une topologie, c'est à dire d'un ensemble d'ouverts. On abordera ceci à la fin du chapitre. L'espace muni de sa topologie est appelé *espace topologique*.

3.1 Ouverts

Le but de cette section est celui d'introduire la notion nécessaire à parler de convergence sans faire appel à la notion de distance. Il s'agit de la notion de partie ouverte.

On procède ainsi. On se situe dans le cas spécial où on à affaire à un espace métrique (E, d) et on précise dans ce contexte la définition de partie ouverte. Après quelques exemples et notions connexes, on sera en mesure, dans la section suivante, de reformuler la notion de convergence et même la notion de continuité exclusivement en terme de partie ouvertes.

Sout (E, d) un espace métrique.

Définition. On dit qu'une partie A de (E, d) est *ouverte* (ou est un *ouvert*) si pour tout $a \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$. On dit qu'une partie A de (E, d) est *fermée* (ou est un *fermé*) si son complémentaire dans E est un ouvert de E. Autrement dit la partie A est fermée si pour tout $a \in E \setminus A$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon)$ est disjoint de A.

On peut maintenant reformuler le théorème 2.37.

Théorème 3.1. *On a les propriétés suivantes.*

i. *Si $\phi\colon E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle,* $\ker \phi$ *est un hyperplan.*

ii. *En général, un hyperplan H d'un EVN est soit dense soit fermé.*

iii. *Une forme linéaire non nulle ϕ est continue si et seulement si* $\ker(\phi)$ *est fermé.*

Exemples.
- Les ensembles $\varnothing$ et E sont ouverts et fermés dans (E, d).
- Dans $(\mathbb{R}, \mathrm{us})$, l'ensemble $\mathbb{R}$ est ouvert et fermé, $]0,1[$ est ouvert mais pas fermé, $[0,1]$ est fermé mais pas ouvert, $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé.
- On considère (E, d) avec la distance discrète. Tout singleton $\{x\}$ est ouvert et fermé.
- L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y < 1/x\}$ est ouvert dans $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. D'autre part, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, yx \leq 1\}$ est fermé.

Remarque. Dans (E, d), toute boule ouverte est ouverte, toute boule fermée est fermée.

Théorème 3.2. *Dans (E, d), on a les propriétés suivantes.*

1) *Les parties $\varnothing$ et E sont ouvertes et fermées.*

2) *Une union quelconque d'ouverts est ouverte.*

3) *Une intersection finie d'ouverts est ouverte.*

4) *Une union finie de fermés est fermée.*

5) *Une intersection quelconque de fermés est fermée.*

Démonstration. La propriété (1) est évidente.

On démontre (2). Soit I un ensemble quelconque. À tout $i \in I$ on associe un ouvert A_i. Or soit $a \in \cup_{i \in I} A_i$. Il existe au moins un indice i tel que a appartient à A_i. Ainsi, il existe $B(a, \varepsilon)$ contenu dans A_i et donc dans A qui inclut A_i.

Soit A l'intersection des ouverts A_1, …, A_n. Pour tout $a \in A$ on a $a \in A_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Or il existe ε_1,…, ε_n satisfaisants $B(a, \varepsilon_i) \subset A_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Il est clair que $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$ est un réel strictement positif et que $B(a, \varepsilon)$ est inclus dans A.

Clairement (4) et (5) se démontrent par passage au complémentaire. $\square$

Contre-exemple. On a $\cap_{n=1}^{\infty}]0, 1+1/n[=]0,1]$ et $\cup_{n=1}^{\infty} = [0, 1-1/n] = [0,1[$.

Corollaire 3.3. *Les ouverts de (E, d) sont les réunions de boules ouvertes.*

Proposition 3.4. *Soit (E_1, d_1), (E_2, d_2) deux espaces métriques et A_i une partie de E_i, $i = 1, 2$. Alors si $A_i, i = 1, 2$ est ouvert (resp. fermé) dans (E_i, d_i), $A_1 \times A_2$ est ouvert (resp. fermé) dans $E_1 \times E_2$.*

Remarque. Un ouvert de E n'est pas forcément un produit d'ouverts.

Proposition 3.5. *Soit A une partie non vide de E, d_A la distance induite. Soit U une partie de A. Alors on a les caractérisations suivantes.*
1) *L'ensemble U est un ouvert de (A, d_A) si et seulement si il existe un ouvert O de E tel que $U = A \cap O$.*
2) *L'ensemble U est un fermé de (A, d_A) si et seulement si il existe un fermé F de E tel que $U = A \cap F$.*

Démonstration. On écrit les ouverts comme union de boules ouvertes, et pour (2) on passe au complémentaire. Les ouverts et les fermés de A sont donc les traces sur A des ouverts et des fermés de E. $\square$

Exemple. On considère $A = [0, 1[\subset (\mathbb{R}, us)$. Alors, $[0, 1[$ est ouvert et fermé dans A, $[0, 1/2[$ est ouvert, $[1/2, 1[$ est fermé.

Exercice. Soit $A =]0, 5] \cup \{6\} \subset \mathbb{R}$. Déterminer pour chacune des parties suivantes si elle ouverte, fermée dans (A, d_A) : $]0, 1[$, $\{6\}$, $]1, 4[$, $]2, 5]$, $]0, 2]$.

Remarque. Si A est ouvert dans E, alors $O \subset A$ est ouvert dans A si et seulement si il est ouvert dans E. De même, si A est fermé dans E, $F \subset A$ est fermé dans A si et seulement si il est fermé dans E.

Définition (voisinage)**.** Soit $a \in E$ et V une partie de E contenant a. On dit que V est un *voisinage* de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$.

Exemple. L'intervalle $[0, 1[$ est un voisinage de $1/2$ dans $(\mathbb{R}, us)$.

Définition (voisinage, deuxième définition équivalente)**.** L'ensemble V est un voisinage de a si et seulement si il existe un ouvert O de (E, d) tel que $a \in O \subset V$.

Remarque. Une partie A de E est ouverte si et seulement si elle est un voisinage de chacun de ses points.

3.2 Convergence et continuité en termes d'ouverts

Nous sommes maintenant en mesure de fournir des définitions des notions de convergence et de continuité en termes d'ouverts.

Théorème 3.6. *Soit (x_n) une suite de (E, d). Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) La suite (x_n) converge vers $a \in E$.
2) Pour tout voisinage V de a, $x_n \in V$ pour tout n assez grand.
3) Pour tout ouvert O contenant a, $x_n \in O$ pour tout n assez grand.

Démonstration. On peut montrer (1) $\Rightarrow$ (2) et on le reste en exercice. La condition (1) signifie que pour toute boule $B(a, \varepsilon)$ pour n assez grand x_n appartient à $B(a, \varepsilon)$. En particulier, comme V est un voisinage de a, on peut choisir une boule $B(a, \varepsilon)$ contenue en V. Pour n assez grand x_n appartient à la boule et donc à V.

Réciproquement, on admet que, quelque soit V, pour n assez grand x_n est dans V. On peut appliquer cette condition à $V = B(a, \varepsilon)$. On obtient que x_n appartient à $B(a, \varepsilon)$ pour n assez grand ; c.-à-d. (x_n) converge vers a. □

Théorème 3.7. *Soit $f\colon (E, d) \to (F, \delta)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) La fonction f est continue sur E.

2) Pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

3) Pour tout a et pour tout voisinage V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a.

4) Pour tout fermé U de F, $f^{-1}(U)$ est un fermé de E.

Démonstration. Un ouvert étant le voisinage de tous ses points on voit facilement[1] l'équivalence entre (2) et (3). D'autre part (4) est équivaut à (2) par passage au complémentaire. On se concentre donc sur la preuve de (1) $\Rightarrow$ (3). Plus précisément on montre le lemme suivant.

Lemme 3.8. *La fonction f est continue en $a \in E$ si et seulement si pour tout voisinage V de $f(a)$ l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a.*

Démonstration. On admet la continuité en a et on considère un voisinage V de $f(a)$, c.-à-d. un ensemble contenant $B(f(a), \varepsilon)$ pour un nombre réel $\varepsilon > 0$ convenablement choisi. Or, grâce à la continuité de f en a, il existe $\eta > 0$ tel

1. Exercice, où bien voir la séance de mercredi 5/10.

que $f(B(a,\eta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$; autrement dit, on a $B(a,\eta) \subset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$. En particulier on a $B(a,\eta) \subset f^{-1}V$.

Réciproquement on admet que $f^{-1}V$ est un voisinage de a pour tout V voisinage de $f(a)$. On applique cette condition à $B(f(a),\varepsilon)$ pour un nombre réel ε convenablement choisi. On obtient que $f^{-1}B(f(a),\varepsilon)$ contient une boule centré en a : il existe $\eta > 0$ tel que $B(a,\eta) \subset f^{-1}B(f(a),\varepsilon)$. On a donc $f(B(a,\eta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$. $\square$

Comme on l'a déjà illustré, l'énoncé du théorème suit facilement. $\square$

Remarque. On ne peut rien dire de l'image d'un ouvert. Exemple : la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ où $f(\mathbb{R}) =]0,1]$ n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \to \mathbb{R}$, croissante. Si $f(A)$ est ouvert, f est continue.

Corollaire 3.9. *Soit d,d' deux distances sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) Les distances d et d' sont topologiquement équivalentes.

2) Les espaces métriques (E,d) et (E,d') ont les mêmes ouverts.

3) Les espaces métriques (E,d) et (E,d') ont les mêmes fermés.

Par conséquence, dans $\mathbb{R}^n$, pour montrer qu'une partie est ouverte d_1,d_2 ou d_∞ on peut utiliser n'importe laquelle des 3 distances.

Le fait que l'image réciproque d'un ouvert par une application continue soit ouverte donne un moyen efficace de montrer qu'une partie est ouverte.

Exemples.

– Considérer encore les parties $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y < 1/x\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$.
– L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ est ouvert, et l'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant ± 1 est fermé. On utilise la continuité de l'application déterminant.
– Dans $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\| \; \|_\infty$, $A = \{f \in E | f(0) > 1\}$ est ouvert et $B = \{f \in E \mid f(0) \geq 1\}$ est fermé : on utilise la continuité de l'evaluation $e_0 : E \to \mathbb{R}$.
– Soit $f,g\colon (E,d) \to (F,\delta)$ continues, $\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé avec la continuité de $x \mapsto \delta(f(x),g(x))$.

– Soit $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$, on appelle *graphe de f* l'ensemble
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subset E \times F.$$
Si f est continue alors G_f fermé dans $E\times F$ muni de la distance produit. Que dire de l'implication dans le sens opposé ?

Remarque. On rappelle que si f est une fonction $(E,d) \to (F,\delta)$ et A une partie de E, la continuité de $f_{|A}\colon (A,d_A) \to (F,\delta)$ ne dit rien sur celle de f sur A. Par contraste, si A est ouvert on a le résultat suivant.

Proposition 3.10. *Si A est ouvert et $f_{|A}\colon (A,d_A) \to (F,\delta)$ est continue, alors $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ est continue sur A.*

Démonstration. Une preuve métrique : pour $x \in A$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B_{d_A}(x,\eta)) \subset B_\delta(f(x),\varepsilon)$. Comme A est ouvert $B_d(x,\eta) \subset A$ si η est assez petit et alors $B_{d_A}(x,\eta) = B_d(x,\eta)$. □

Théorème 3.11 (recollement d'applications continues)**.** *Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $E = \bigcup_{i\in I} U_i$. Soient $f_i\colon (U_i, d_{U_i}) \to (F,\delta)$ continues, telles que $f_{i|U_i\cap U_j} = f_{j|U_i\cap U_j}$. Alors il existe une unique application $f\colon E \to F$ telle que $f_{|U_i} = f_i$. On a les implications suivantes.*

i. Si tous les U_i sont ouverts, alors $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ est continue.

ii. Si I est fini et tous les U_i sont fermés, alors $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ est continue.

Démonstration. L'existence de f est claire et la continuité dans (i) résulte de la proposition 3.10. Pour (ii) on montre que l'image réciproque d'un fermé A de F est fermé dans E en écrivant
$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap (\cup_{i\in I} U_i) = \cup_{i\in I}(f^{-1}(A) \cap U_i) = \cup_{i\in I} f_i^{-1}(A).$$
Puisque $f_i^{-1}(A)$ est fermé dans A et A est fermé dans E, $f_i^{-1}(A)$ est fermé dans E. Alors $f^{-1}(A)$ est fermé dans E comme union finie de fermés. □

3.3 Intérieur, adhérence, frontière

Soit (E,d) un espace métrique. Soit A une partie de E. On définit l'intérieur $\overset{\circ}{A}$, l'adhérence $\overline{A}$, et la frontière ∂A de A.

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in E \mid \exists \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \subset A\} = \{x \in E \mid \exists O \text{ ouvert}, x \in O \subset A\}$$
$$\overline{A} = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing\} = \{x \in E \mid \forall O \ni x \text{ ouvert}, O \cap A \neq \varnothing\}$$
$$\partial A = \overline{A} \setminus A$$

L'intérieur est l'ensemble des x tels que A est un voisinage de x.

Exercice. Déterminer l'intérieur de $[0,1[$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Proposition 3.12. *On a*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \text{ ouvert } \subset A} O.$$

Ainsi $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, c'est-à-dire que $\overset{\circ}{A} \subset A$ est ouvert et si $O \subset A$ est ouvert alors $O \subset \overset{\circ}{A}$.

On a

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé } \supset A} F$$

Ainsi $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, c'est à dire que $A \subset \overline{A}$ qui est fermé et si $A \subset F$ un fermé alors $\overline{A} \subset F$.

Remarque. On a $E\backslash\overline{A} = \overset{\circ}{\overline{E\backslash A}}$ et $E\backslash\overset{\circ}{A} = \overline{E\backslash A}$.

Proposition 3.13. *On a $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite (x_n) de A qui converge vers x.*

Démonstration. Si $x \in \overline{A}$ alors chaque boule $B(x, 1/n)$ contient un élément de A. Appellons le x_n. On obtient la suite convergent souhaitée. Reciproquement montrons que si O est un ouvert qui contient x alors O intersecte A. On considère x_n qui converge vers x. Grâce à la caractérisation de la convergence en termes d'ouverts O contient au moins un terme de la suite et donc O intersecte A. $\square$

On deduit facilement de la proposition précédente deux corollaires.

Corollaire 3.14 (caractérisation séquentielle des fermés)**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. *La partie A est fermée.*

ii. *On a $A = \overline{A}$.*

iii. *Pour toute suite (x_n) de A convergeant vers $x \in E$, $x \in A$.*

Corollaire 3.15 (caractérisation des parties denses)**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. *L'ensemble A est dense dans E.*

ii. *On a $\overline{A} = E$.*

iii. *On a $\overset{\circ}{\overbrace{E\backslash A}} = \varnothing$.*

iv. L'ensemble A rencontre tout ouvert de E.

Proposition 3.16. *Soient A et B deux parties de E. Alors on a les propriétés suivantes.*

(i) Si A est inclus dans B, alors $\mathring{A}$ est inclus dans $\mathring{B}$ et $\overline{A}$ est inclus dans $\overline{B}$,

(ii) On a $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,

(iii) On a $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$,

(iv) Si $A_i \subset E_i$, alors $\overset{\circ}{\widehat{A_1 \times A_2}} = \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2$ et $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.

Démonstration. Exercice. Trouver aussi des contre-exemples qui montrent que les inclusion ci-dessus sont strictes. Dans le cours l'exemple $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$ a été proposé. □

Proposition 3.17. *On a*

$$B(x, r) \subset \overset{\circ}{\widetilde{B}(x, r)} \quad \text{et } \overline{B(x, r)} \subset \widetilde{B}(x, r),$$

avec égalité dans un EVN.

Démonstration. Les inclusions sont triviales puisque la boule ouverte est ouverte et la boule fermée est fermée. □

Remarque. Les boules de rayon 1 pour la distance discrète contredisent l'égalité.

Théorème 3.18. *Soit (x_n) une suite de E et Λ l'ensemble des ses valeurs d'adhérence. Alors*

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$$

En particulier, Λ est fermé.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} x \in \Lambda &\iff \forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(x, \varepsilon)\} \text{ est infini} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \{x_k \mid k \geq n\} \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \{x_k \mid k \geq n\} \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing \\ &\iff \forall n, x \in \overline{\{x_k \mid k \geq n\}} \\ &\iff x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_k \mid k \geq n\}} \end{aligned}$$

□

Exercice. Considérer le cas $x_n = n$.

On voit aussi une caractérisation des éléments de l'interieur et de l'adhérence en terme de distances. On rappelle que pour toute partie non vide on peut definir la fonction sur E donnée par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Il est facile de voire que cette fonction est continue. Pour le montrer on peut utiliser la propriété suivante : pour tout $x, y \in E$, on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Théorème 3.19. *On a $x \in \overline{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.*

Si A est différent de E, alors $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si $d(x, E \backslash A) > 0$.

Corollaire 3.20 (séparation des fermés)**.** *Soient A,B deux parties non vides, fermées, disjointes de (E, d). Alors on a les propriétés suivantes.*

i. Il existe une application continue $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f = 1$ sur A et $f = 0$ sur B.

ii. Il existe deux ouverts disjoints O et O' tel que $A \subset O$ et $B \subset O'$.

Démonstration. On prend $f(x) = \frac{d(x,B)}{d(x,A)+d(x,B)}$. La continuité de la fonction suit facilement de la continuité de la fonction $x \mapsto d(x, A)$. Il est crucial de voir que le dénominateur ne s'annule pas : pour cela les hypothèses A, B fermés et disjoints sont fondamentales. En effet si $x \notin B$ alors $x \in E \setminus \overline{B} = \overset{\circ}{\overline{E \setminus B}}$. On peu appliquer le critère ci-dessus et conclure $d(x, B) > 0$. D'autre part pour $x \in B$ on peut déduire $x \notin A$ et procéder de la même façon.

On conclut en posant $O = f^{-1}(B(0, 1/2))$ et $O' = f^{-1}(B(1, 1/2))$. □

Théorème 3.21. *Soit $(F, \| \ \|)$ un EVN de dimension finie et A une partie fermée de F. Soit $x \in F$. Alors il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = d(x, A)$.*

Démonstration. On considère une suite (a_n) de A s'approchant de l'infimum donc restant à distance bornée de x. On applique BW (cor 2.31) et la limite $a \in A$ car A est fermé. □

Contre-exemple. On considère l'EVN de dimension infinie $E = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c.-à-d. l'ensemble des fonctions réelles continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme ($C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel). On prend des $f_n \in E$ affine par morceaux, nulle sur $(-\infty, n - 1/2] \cup [n + 1/2, +\infty)$, valant $1 + 1/n$ en n. Alors $F = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fermé (avec la caractérisation séquentielle des fermés et le fait que $\|f_n - f_m\| > 1$ si $n \neq m$). Si $f \in E$ est la fonction nulle, $d(f, F) = 1$ mais $d(f, f_n) > 1$ pour tout n.

Remarque. Si un point $y \in A$ réalise la distance $d(x, A)$, il n'y a pas forcément unicité. Exemple : le centre d'une sphère de rayon 1 dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

On conclut cette section par la notion de *r-voisinage d'une partie A* :

$$A_r = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$$

C'est un ouvert, image réciproque de $]-\infty, r[$ par $x \mapsto d(x, A)$. De plus on a $A_r = \cup_{a \in A} B(a, r)$.

Proposition 3.22.
1) Tout fermé de (E, d) est intersection dénombrable d'ouverts.
2) Tout ouvert est union dénombrable de fermés.

Démonstration. On utilise $F = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} F_{1/n}$ et un passage au complémentaire. □

3.4 Topologie générale

Dans cette section on va voir comment faire de la topologie, c'est-à-dire parler de convergence, de densité ou de continuité, sans utiliser de distance. Les motivations sont :
- simplicité, efficacité,
- necessité (par exemple pour la topologie quotient),
- élegance.

Se donner une *topologie* sur un ensemble X consiste à choisir un ensemble de parties de X qui vérifie certains axiomes. Ces parties sont alors appelées ouverts de la topologie. On verra comment les résultats vus pour des espaces métriques s'étendent dans ce cadre plus général. Les espaces topologiques seront utilisés dans le cours de théorie de la mesure en particulier.

3.4.1 Topologie, espace topologique.

Soit X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition. On dit que $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ est une *topologie* sur X si les trois axiomes suivants sont satisfaits.

(1) On a $\varnothing \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$.

(2) Une union quelconque d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$.

(3) Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$.

Autrement dit, $\mathcal{O}$ doit être stable par union quelconque et par intersection finie. On appelle *ouverts* les éléments de $\mathcal{O}$ et $(X, \mathcal{O})$ est appelé un *espace topologique*.

Exemple.

i. Si (E, d) est un espace métrique, $\mathcal{O} = \{O \text{ ouverts de } (E, d)\}$ est une topologie (d'où le titre du cours !), Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. On dit que $(X, \mathcal{O})$ est *métrisable* s'il existe une distance sur X ayant $\mathcal{O}$ comme ouverts.

ii. La topologie grossière est donné par $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$ (elle n'est pas métrisable).

iii. La topologie discrète est donné par $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$. C'est celle induite par la distance discrète.

iv. Soit $X = \{a, b, c\}$, l'ensemble $\mathcal{O} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ est une topologie sur X (non métrisable). D'autre part $\{\varnothing, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}\}$ et $\{\varnothing, X, \{a, c\}, \{a, b\}\}$ ne le sont pas.

v. Exercice : la partie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ constituée de $\varnothing$,$\mathbb{R}$ et tous les intervalles $]a, +\infty[$, pour $a \in \mathbb{R}$, est une topologie sur $\mathbb{R}$.

On verra d'ici peu des exemples plus motivants.

Proposition 3.23. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X contenant X et stable par intersection finie. Alors on a les propriétés suivantes.*

i. L'ensemble $\mathcal{O}$ des réunions d'éléménts de $\mathcal{B}$ est une topologie sur X.

ii. Pour qu'une partie A de X soit un élément de $\mathcal{O}$, il faut et il suffit que

$$\forall x \in A, \exists B \in \mathcal{B},\ x \in B \subset A.$$

Démonstration. $X \in \mathcal{O}$, $\varnothing \in \mathcal{O}$. Une réunion de réunions d'éléments de $\mathcal{B}$ est une réunion d'éléménts de $\mathcal{B}$. Soit $O = \cup_{i \in I} B_i$ et $O' = \cup_{j \in J} B'_j$, où les B_i et les B'_j sont dans $\mathcal{B}$. Alors

$$O \cap O' = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} B_i \cap B'_j$$

est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.
Soit $A \in \mathcal{O}$, $x \in A$. A est réunion d'éléménts de $\mathcal{B}$ et l'un deux contient x. Réciproquement, si tout $x \in A$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset A$, on a $A = \cup_{x \in A} B_x \in \mathcal{O}$. □

Définition. Une telle partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est appelée une base d'ouverts (ou base de la topologie).

Définition.
- On appelle *fermés* de $(X, \mathcal{O})$ les complémentaires des ouverts. Les fermés sont stables par intersection quelconque et par union finie.
- On dit que $V \subset X$ est un *voisinage* de $a \in X$ s'il existe un ouvert O tel que $a \in O \subset V$. Comme la notion de voisinage est moins restrictive de celle d'ouvert, on utilise souvent des bases de voisinages. On dit qu'une partie $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{P}(X)$ de voisinages de $x \in X$ est une *base de voisinages de* $x \in X$ si pour tout voisinage V de x il existe $W \in \mathcal{V}_x$ tel que $x \in W \subset V$. On note qu'une base d'ouverts $\mathcal{B}$ de la topologie $\mathcal{O}$ a la propriété d'être une base de voisinages de tout point de l'espace topologique.

Exemple. On condidère $(E, \mathcal{O})$, un espace topologique métrisable associé à l'espace métrique (E, d). Les boules forment une base de voisinages pour tout points de E.

Définition. Soit A une partie de l'espace topologique $(E, \mathcal{O})$. La famille $\mathcal{O}_A = \{B \cup U \mid U \in \mathcal{O}\}$ est une topologie pour A. Ainsi $(A, \mathcal{O}_A)$ est un espace topologique.

On regarde souvent une partie comme un espace topologique avec la topologie induite $\mathcal{O}_A$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on ne mentionne pas la topologie induite.

3.4.2 Suites, adhérences, continuité

Définition. On dit qu'une suite (x_n) de $(X, \mathcal{O})$ converge vers $x \in X$ si pour tout voisinage V de x, $x_n \in V$ pour tout n assez grand.

Remarque. La limite n'est pas forcément unique !

Exemple. $E = \{a, b, c, d\}, \mathcal{O} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ et $x_n = c$ si n est pair et d sinon. Encore plus brutal, pour la topologie grossière sur X quelconque, toute suite converge vers tout élément.

Définition. On dit que la topologie $\mathcal{O}$ est *séparée* si pour tout $x \neq x' \in X$, il existe deux ouverts disjoints O et O' tels que $x \in O$ et $x' \in O'$.

Fait 3.24. *Dans un espace topologique séparé, la limite d'une suite convergente est unique.*

Démonstration. Si $x \neq x'$ sont limites d'une suite (x_n) on prend O et O' des ouverts séparant x de x' et $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $x_n \in O$ si $n \geq n_0$ et $x_n \in O'$. □

Remarque. Un espace métrique est toujours séparé : on sépare x de x' avec les boules de rayon $d(x, x')/2$. Le fait d'être non séparé est donc un critère pour détecter la non métrisabilité.

Définition. L'*intérieur* de $A \subset (X, \mathcal{O})$ est l'ensemble

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A \mid \exists O \in \mathcal{O}, x \in O \subset A\}$$

C'est l'ensemble des points de A dont A est un voisinage. On peut remplacer ouvert par voisinage dans la définition.

Définition. L'*adhérence* de $A \subset X$ est l'ensemble

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall V \text{ voisinage de } x, A \cap V \neq \varnothing\}$$

Fait 3.25. *On a encore*

i. $X \setminus \overset{\circ}{A} = X \setminus \overline{A}$ *et* $\overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}$

ii. $\overset{\circ}{A}$ *est ouvert,* $\overline{A}$ *est fermé.*

iii. Si une suite (a_n) *de* A *converge vers* $x \in X$ *alors* $x \in \overline{A}$.

Remarque. La caractérisation séquentielle de l'adhérence n'est pas forcément vraie.

Lemme 3.26. *Si* $x \in \overline{A}$ *et si* x *admet une base dénombrable de voisinages, alors il existe une suite de* A *convergeant vers* x.

Démonstration. Soit $x \in \overline{A}$ et $\mathcal{V}_x = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable. Posons $W_n = V_0 \cap V_1 \cap \cdots V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque c'est un voisinage de x, $W_n \cap A \neq \varnothing$ implique l'existence de $x_n \in W_n \cap A$. Montrons que (x_n) converge vers x. Soit V un voisinage de x. Il existe $V_{n_0} \in \mathcal{V}_x$ tel que $V_{n_0} \subset V$. Alors pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in W_n \subset V_{n_0} \subset V$. □

Remarque. Un espace métrique admet une base dénombrable de voisinages en tout point x : les boules $B(x, 1/n)$.

Définition. On dit que $f\colon (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}')$ est *continue en* $x \in X$ si pour tout voisinage V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Elle est *continue sur* X si elle est continue en tout point.

Remarque. La continuité uniforme et la notion d'application lipschitzienne n'ont pas de sens en général.

Remarque. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i. La fonction f est continue sur X.
ii. L'image réciproque via f de tout ouvert est ouverte.
iii. L'image réciproque via f de tout fermé est fermée.

Fait 3.27. *Si (x_n) converge vers $x \in X$ alors $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ mais le critère sequentiel de continuité n'est plus vrai.*

Démonstration. Exercice. □

On ne peut pas caractériser la continuité par des suites lorsqu'il y a trop de voisinages.

Lemme 3.28. *Si $\mathcal{O}$ admet une base dénombrable de voisinages en x, alors le critère séquentiel de continuité est vrai en x.*

Démonstration. Supposons que f ne soit pas continue en x. Alors il existe un voisinage V de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de x, c'est-à-dire que x n'est pas intérieur à $f^{-1}(V)$. Il est donc adhérent à son complémentaire, $X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$. Par la caractérisation séquentielle, il existe une suite x_n de $f^{-1}(Y \setminus V)$ convergeant vers x. Cette suite satisfait la condition $f(x_n) \notin V$, donc elle ne converge pas vers $f(x)$. □

3.4.3 Topologie quotient

On va voir dans cette section une construction où la notion de topologie est incontournable.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X (on peut prendre (E, d) pour simplifier). On souhaite définir une topologie $\bar{\mathcal{O}}$ sur l'espace quotient $X/\mathcal{R}$. La topologie de $X/\mathcal{R}$ est caractérisée par les propriétés suivantes. Tout d'abord, l'application quotient

$$p : X \to X/\mathcal{R}$$

$$x \mapsto \bar{x}$$

est continue. Ensuite on considère une application f de X dans un espace topologique Y telle que $f(x) = f(x')$ si $x\mathcal{R}x'$. Dans ce cas f "passe au quotient" ; c.-à-d. il existe une application

$$\bar{f} \colon X/\mathcal{R} \to Y,$$

dite application induite, telle que $f = \bar{f} \circ p$. On construit la topologie quotient de $X/\mathcal{R}$ en telle sorte que $\bar{f}$ est continue si f est continue.

Définition. On appelle *topologie quotient* sur $X/\mathcal{R}$ l'ensemble des parties O de $X/\mathcal{R}$ telles que $p^{-1}(O)$ soit un ouvert de X.

Lemme 3.29. *La topologie quotient est une topologie. L'application p est continue. Lorsque $f\colon X \to Y$ est continue et passe au quotient*

$$\bar{f}\colon X/\mathcal{R} \to Y,$$

l'application induite $\bar{f}$ est continue.

Démonstration. Notons $\bar{\mathcal{O}}$ la topologie quotient, c'est-à-dire

$$\bar{\mathcal{O}} = \{O \subset X/\mathcal{R} \mid p^{-1}(O) \in \mathcal{O}\}.$$

Comme $p^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{O}$ et $p^{-1}(X/\mathcal{R}) = X \in \mathcal{O}$, $\varnothing$ et $X/\mathcal{R}$ sont dans $\bar{\mathcal{O}}$. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d' ouverts de $X/\mathcal{R}$. Alors

$$p^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i) = \bigcup_{i\in I} p^{-1}(O_i)$$

est une réunion d'ouverts de X donc est ouvert dans X. Donc $\bar{\mathcal{O}}$ est stable par union quelconque. Soit O_1, $O_2 \in \bar{\mathcal{O}}$. Alors

$$p^{-1}(O_1 \cap O_2) = p^{-1}(O_1) \cap p^{-1}(O_2)$$

est une intersection finie d'ouverts de X donc est ouvert dans X. On en déduit que $\bar{\mathcal{O}}$ est stable par intersection finie.
L'application quotient est continue puisque pour tout ouvert $O \in \bar{\mathcal{O}}$, $p^{-1}(O)$ est ouvert dans X. Enfin, si $f\colon X \to Y$ est continue et passe au quotient ($x\mathcal{R}y$ implique $f(x) = f(y)$) soit O un ouvert de Y. Comme $\bar{f} \circ p = f$, $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(O)) = f^{-1}(O)$ est ouvert dans X donc $\bar{f}^{-1}(O)$ est ouvert dans $X/\mathcal{R}$. □

L'argumentation ci-dessus prouve seulement qu'il est facile de définir une topologie sur un espace quotient, en ayant recours aux espaces topologiques. Plus facile en tout cas que de faire passer au quotient une distance. En fait, dans certains cas c'est la seule solution.

Assertion. *Si $X = (E, d)$ est un espace métrique muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ pour laquelle une classe est dense dans E, alors la topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ n'est pas séparée (si $X/\mathcal{R}$ n'est pas réduit à un point).*

Démonstration. En effet, supposons que X soit un espace métrique (E, d) tel que pour tout $x \in E$, $\bar{x}$ soit dense dans E (par exemple $X/\mathcal{R} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$). Supposons aussi que $X/\mathcal{R}$ ne soit pas réduit à un élément. Prenons $x, y \in E$ tel que $\bar{x} \neq \bar{y} \in X/\mathcal{R}$ et $\bar{x}$ est dense dans E. Par densité il existe $x_n \in \bar{x}$ convergeant vers y dans (E, d). Par continuité de l'application quotient, $\bar{x} = p(x_n)$ converge vers $p(y) = \bar{y}$. Si la topologie du quotient était séparée, on déduirait de l'unicité de la limite que $\bar{x} = \bar{y}$, ce qui contredit notre choix initial. □

Remarque. Dans ce cas la topologie quotient n'est pas métrisable. La preuve ci-dessus fonctionne en fait pour n'importe quelle topologie sur le quotient rendant l'application quotient continue. Il n'existe pas de topologie "raisonnable" sur $X/\mathcal{R}$ dans le cadre des espaces métriques. Il est donc nécessaire de travailler avec des espaces topologiques.

3.5 Connexité

Définition. Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est *connexe* si il n'admet pas de partition en deux ouverts. Autrement dit on ne peut pas l'écrire $E = O_1 \cup O_2$ où O_1, $O_2 \subset E$ sont non vides, disjoints et ouverts.

Précision : une partition d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, disjointes deux à deux, et dont la réunion est E. Par exemple si $A \subset E$ est non vide et différent de E, $\{A, E \backslash A\}$ est une partition de E.

Définition. Une partie A de $(E, \mathcal{O})$ est connexe si A muni de la topologie induite constitue un espace topologique connexe.

Exemples.

0) $\varnothing$ est connexe.

1) Dans (E, d), tout singleton est connexe. Si $a \neq b \in E$, $\{a\} \cup \{b\}$ n'est pas connexe.

2) Dans $(\mathbb{R}, us)$, $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas connexe.

3) $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe avec $\mathbb{Q} = (]-\infty, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}) \cup (]\sqrt{2}, +\infty[\cap\mathbb{Q}$.

Théorème 3.30. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. L'ensemble E est connexe.

ii. *Il n'existe pas de partition de E en deux fermés.*

iii. *Les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E.*

iv. *Toute $f: (E, \mathcal{O}) \to (\{0,1\}, us)$ continue est constante.*

Démonstration.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Une partition en deux ouverts est une partition en deux fermés.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si $A \subset E$ est ouverte et fermée, et différente de $\varnothing$, E, alors A, $E \backslash A$ forme une partition en deux ouverts de E.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Soit $f: E \to \{0,1\}$ continue. Alors $f^{-1}(\{0\})$ est ouvert est fermé.
non $(i) \Rightarrow$ non (iv). Soient O_1,O_2 deux ouverts de E formant une partition. On définit f de E dans $\{0,1\}$ en posant $f(O_1) = 0$ et $f(O_2) = 1$. L'application f est continue par le théorème de recollement. □

Remarque. La caractérisation (iii) peut servir pour montrer qu'une certaine propriété $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$ connexe : on montre que l'ensemble $\{x \in E \mid P(x)\}$ est ouvert, fermé et non vide.

Théorème 3.31. *Dans $(\mathbb{R}, us)$, les parties connexes sont les intervalles.*

Démonstration. Si A est un connexe non vide, soit $x \leq y \in A$. Supposons qu'il existe $x < z < y$, $z \notin A$. Alors $]-\infty, z[\cap A$ et $]z, +\infty[\cap A$ réalisent une partition de A en deux ouverts, ce qui contredit l'hypothèse.

Réciproquement, soit I un intervalle et $f: I \to \{0,1\}$ continue. S'il existe $x < y \in I$ tel que $f(x) \neq f(y)$, quitte à remplacer f par $1 - f$ on peut supposer que $f(x) = 0$. Soit

$$A = \{t \in [x,y] \mid f(s) = 0 \ \forall s \in [x,t]\}$$

Cet ensemble est non vide car contient x, majoré par y donc admet un borne supérieure α. Comme $\alpha \in \overline{A}$ et f est continue, on a $f(\alpha) = 0$. La continuité de f implique que $f^{-1}(\{0\})$ est un ouvert de I. Comme $\alpha < y$, on en déduit qu'il existe $\sigma > 0$ tel que $\alpha + \sigma < y$ et $f = 0$ sur $[\alpha, \alpha + \sigma]$, ce qui contredit la définition de α. □

Proposition 3.32. *On considère deux espaces* métriques *E_1 et E_2 et leur produit $E_1 \times E_2$. Le produit $E_1 \times E_2$ est connexe si et seulement si E_1 et E_2 sont connexes.*

Démonstration. Supposons $E_1 \times E_2$ connexe et soit $f: E_1 \to \{0,1\}$ continue. La projection $p_1: E_1 \times E_2 \to E_1$ étant continue, on a $f \circ p_1: E_1 \times E_2 \to \{0,1\}$ constante d'où $f(E_1)$ est une constante. Réciproquement, supposons E_1 et E_2 connexes et soit $f: E_1 \times E_2 \to \{0,1\}$ continue. Pour chaque $x_2 \in E_2$, l'application partielle sur E_1, $x \mapsto f(x, x_2)$ est continue donc constante. De même, $y \mapsto f(x_1, y)$ est constante sur E_2, pour tout $x_1 \in E_1$. Clairement, s'il existe (a, b) tel que $f(a, b) = 0$ alors $f(x_1, x_2) = f(x_1, b) = f(a, b) = 0$ pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. □

Proposition 3.33. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une collection de parties connexes de E, alors*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing \implies \bigcup_{i\in I} A_i \text{ est connexe.}$$

Démonstration. Avec f à valeurs dans $\{0, 1\}$. □

Proposition 3.34. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une collection de parties connexes de E telles que pour tout n, $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est connexe.*

Démonstration. L'énoncé suit du lemme suivant qu'on montre aisément par recurrence.

Lemme 3.35. *Si $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une collection finie de parties connexes de E telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ alors $\bigcup_{i=1,\ldots,n} A_i$ est connexe.* □

□

Remarque. Une intersection d'ensembles connexes n'est pas nécessairement connexe.

Question. En fait, même une intersection décroissante de connexes n'est pas connexe en général. Donner un exemple.

3.5.1 Connexité et continuité.

Théorème 3.36. *L'image continue d'un connexe est connexe.*

Démonstration. Soit $f\colon E \to F$ continue, E connexe. Soit $g : f(E) \to \{0, 1\}$ continue. Alors $g \circ f$ est continue de E dans $\{0, 1\}$ donc constante. Alors g est constante sur tout $f(E)$. □

Corollaire 3.37. *Soit $f\colon E \to F$ un homéomorphisme. Alors E est connexe si et seulement si F est connexe.*

Ce résultat a plusieurs applications.

Théorème 3.38.

i. Le cercle S^1 est connexe.

ii. *Le cercle S^1 n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.*

iii. *Pour $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.*

Démonstration. 1) C'est l'image de $[0, 2\pi]$ par l'application continue $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.
2) Sinon S^1 est homéomorphe à un intervalle I, non réduit à un point. Soit $f\colon S^1 \to I$ un homéomorphisme, $y \in \overset{\circ}{I}$, $x \in S^1$ tel que $f(x) = y$. La restriction de f à $S^1 \setminus \{x\}$ est un homéomorphisme sur $I \setminus \{y\}$. Or $S^1 \setminus \{x\}$ est connexe comme image continue de $]\theta, \theta + 2\pi[$, avec $(\cos(\theta), \sin(\theta)) = x$, alors que $I \setminus \{y\}$ n'est pas connexe.
3) Sinon la restriction de f à $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme sur une partie de $\mathbb{R}$. □

Théorème 3.39 (théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit E connexe et $f\colon E \to \mathbb{R}$ continue. Si x et y sont deux points de $f(E)$ avec $x < y$, alors $[x, y] \subset f(E)$.*

Démonstration.

Exercice. □

Proposition 3.40. *Si E est connexe et $f\colon E \to F$ est continue alors $Gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est une partie connexe de $E \times F$ muni de la distance produit.*

Démonstration. On écrit $Gr(f) = F(E)$ avec $F : E \to E \times F$, $F(x) = (x, f(x))$. □

Proposition 3.41. *Toute partie convexe d'un EVN est connexe.*

Démonstration. Soit C une partie connexe. Soit $f\colon C \to \{0, 1\}$ continue et $x, y \in C$. La courbe $\gamma : t \mapsto x + t(y - x)$ est continue de $[0, 1]$ dans $[x, y] \subset C$ est connexe. Alors $f \circ \gamma$ est constante car continue de $[0, 1]$ dans $\{0, 1\}$ d'òu $f(x) = f(y)$. □

Remarque. En particulier tout EVN est connexe.

On voit un lemme d'abord.

Lemme 3.42. *Si A est une partie connexe d'un espace métrique (E, d) et $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe. En particulier $\overline{A}$ est connexe.*

Démonstration. On prend $f\colon B \to \{0, 1\}$ continue. □

Comme application du lemme, $\overline{\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0, 1/\pi]\}}$ est connexe.

Théorème 3.43 (Darboux). *Si I est un intervalle ouvert et $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. On pose $A = \{(x,y) \in I \times I \mid x < y\}$. Alors $A \subset \mathbb{R}^2$ est convexe donc connexe. L'application $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est continue sur A, et $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$. □

3.5.2 Connexité par arc

Définition. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, $x, y \in E$. On appelle **arc** ou **chemin** une application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Remarque. Pour $x, y \in E$, ($x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe un arc de x à y) définit une relation d'équivalence. Si γ est un arc de x à y et β un arc de y à z, j'ai donné comme arc de x à z, $\alpha(t) = \gamma(2t)$ si $t \in [0, 1/2]$ et $\alpha(t) = \beta(2(t-1/2))$ si $t \in [1/2, 1]$.

Définition. L'espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est connexe par arcs si pour tout $x, y \in E$, il existe un arc de x à y.

Exemple. Les convexes. La partie $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$. Les boules d'un EVN.

Proposition 3.44. *Soit $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ continue. Si E est connexe par arcs, alors $f(E)$ est connexe par arcs.*

On a les mêmes opérations sur que sur les connexes. On ne le démontre pas ici, elles peuvent être considérés comme un exercice.

Proposition 3.45. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une collection de parties connexes par arcs de E, alors*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing \implies \bigcup_{i\in I} A_i \textit{ est connexe par arcs.}$$

Proposition 3.46. *Si $(A_n)_{i\in\mathbb{N}}$ est une collection de parties connexes par arcs de E telles que pour tout n, $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est connexe par arcs.*

Théorème 3.47. *Si $(E, \mathcal{O})$ est connexe par arcs, alors il est connexe.*

Démonstration. On raisonne avec une fonction $E \to \{0,1\}$ et on démontre que $f(x) = f(y)$ pour tout x et y dans E. Comme il existe $\gamma\colon [0,1] \to E$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ on conclut en considérant $f \circ \gamma$ qui est continue et donc constante. □

La réciproque est fausse : l'exemple classique est l'adhérence du graphe de $\sin(1/x)$. On en fournira une preuve dans le chapitre 5.

Théorème 3.48. *Dans une EVN quelconque, un ouvert est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit O un ouvert connexe et $x \in O$. On pose

$$C = \{y \in O \mid \text{ il existe un arc de } O \text{ de } x \text{ à } y\}.$$

Cet ensemble est non vide. Il est ouvert : soit $y \in O$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset O$, tout point de la boule est relié au centre y par le segment, et donc à x dans O. La boule est donc incluse dans C. L'ensemble C est fermé : soit (x_n) une suite de C convergeant vers $y \in O$. On considère $B(y, \varepsilon) \subset O$. Pour n assez grand $x_n \in B(y, \varepsilon)$ est relié à y par le segment, et donc à x dans O. □

Proposition 3.49. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est dénombrable, $n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n \backslash A$ est connexe par arcs.*

Démonstration. On se ramène au cas de $\mathbb{R}^2$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash A$. L'ensemble $\mathcal{D}_x$ des droites passant par x est non dénombrable car en bijection avec l'intervalle $[0, \pi[$. Il contient donc une droite D_x disjointe de A. En effet, l'application de A dans $\mathcal{D}_x$ qui envoie a sur l'unique droite passant par x et a n'est pas surjective puisque A est dénombrable et $\mathcal{D}_x$ non. De même, l'ensemble $\mathcal{D}_y$ des droites passant par y, privé de la parallèle à D_x, est non dénombrable, et contient D_y disjointe de A. Soit $z = D_x \cap D_y$. Alors $[xz]$ et $[zy]$ sont des arcs de $\mathbb{R}^2 \backslash A$ joignant x, z et y. □

3.5.3 Composantes connexes

Soit E un ensemble et $\mathcal{O}$ une topologie.

Lemme 3.50. *Pour $x, y \in E$, ($x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe une partie C de E connexe contenant x et y) définit une relation d'équivalence.*

Démonstration. La réflexivité et la symétrie sont évidentes. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, soit A une partie connexe contenant x et y, soit B une partie connexe contenant y et z. Comme $A \cap B \neq \varnothing$, la partie $A \cup B$ est connexe donc $x\mathcal{R}z$. □

Définition. Soit $x \in E$. On appelle composante connexe de E contenant x la classe d'équivalence de x pour la relation "être dans une partie connexe de E".

Exemple. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont ses composantes connexes.

Proposition 3.51. *Pour tout $x \in E$, on a la description suivante de la composante connexe de x*

$$C_x = \bigcup_{\substack{C \text{ connexe dans } E \\ x \in C}} C.$$

De plus C_x est une partie connexe et fermée et est la plus grande partie connexes contenant x.

Démonstration. Si $y \in C_x$ il existe une partie connexe C contenant x et y d'où l'inclusion de C_x. Réciproquement, si y appartient à l'union dans l'énoncé, alors il existe une partie connexe contenant x et y, d'où le fait que y appartient à C_x.

La partie C_x est connexe en tant qu'union de parties connexes d'intersection non vide et fermé car $\overline{C_x}$ est connexe donc contenu dans C_x. □

Remarque.
1) Si C_x intersecte un connexe C, alors $C_x \supset C$. Autrement dit, C_x avale tous les connexes qu'elle touche.
2) E est connexe si et seulement si il n'y a qu'une composante connexe.

Pour trouver les composantes connexes, on peut utiliser l'énoncé suivant.

Lemme 3.52. *Soit $A \subset E$ une partie non vide, ouverte, fermée et connexe. Alors, A est une composante connexe de E.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Alors $A \subset C_x$ car A est connexe. Réciproquement, $C_x \cap A$ est non vide, ouvert et fermé dans C_x connexe : il est donc égal à C_x. On a donc $C_x \subset A$. □

Remarque.
1) Réciproque fausse : en général une composante connexe n'est pas ouverte. Par exemple les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons (exo), qui ne sont pas ouverts.
2) Les composantes connexes de $[0, 1] \cup [2, 3]$. sont $[0, 1]$ et $[2, 3]$.

Proposition 3.53. *Si O est une partie ouverte d'un EVN $(E, \| \|)$, les composantes connexes de O sont ouvertes et fermées dans O.*

Démonstration. Soit $x \in O$ et C_x sa composante connexe dans O. Il suffit de montrer qu'elle est ouverte. Soit $y \in C_x$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset O$. La boule $B(y, \varepsilon)$ est connexe dans O car connexe par arcs et intersecte C_x donc $C_x \supset B(y, \varepsilon)$. □

Corollaire 3.54. *Si O est une partie ouverte d'un EVN $(E, \| \|)$, O est réunion disjointe de parties connexes et ouvertes de E.*

Démonstration. Les composantes connexes de E conviennent. □

Théorème 3.55. *Soit $f\colon (E, d) \to (F, \delta)$ continue. Alors pour tout $x \in E$, $f(C_x) \subset C_{f(x)}$.*

Démonstration.

Exercice. □

Corollaire 3.56. *Si f est un homéomorphisme, il y a une bijection entre les composantes connexes de E et celles de F, et pour tout $x \in E$,*

$$f_{|C_x}\colon C_x \to C_{f(x)}$$

est un homéomorphisme.

Exemple. Un bouquet de n droites n'est pas homéomorphe à un bouquet de m droites si $n \neq m$. L'espace S^1 n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (S^1 moins un point est connexe, tandis que $\mathbb{R}$ moins un point ne l'est pas).

Chapitre 4

Espaces métriques complets

Motivation. Les espaces métriques complets sont une classe intéressante d'espaces métriques car ils rendent puissants. On peut faire dans ces espaces beaucoup de choses qu'on ne sait pas faire dans un espace quelconque. Par exemple, on sait trouver le point fixe d'une application contractante, projeter sur une partie convexe, prolonger une application uniformément continue, et bien d'autres. Les applications principales sont des théorèmes d'existence.

4.1 Les suites de Cauchy

Soit (E, d) un espace métrique.

Définition. Une suite (x_n) de (E, d) est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Théorème 4.1.

i. Une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si elle est bornée et $\operatorname{diam}\{x_k \mid k \geq n\}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

ii. Une sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.

iii. Si une sous-suite d'une suite de Cauchy converge, la suite converge.

iv. Toute suite convergente est de Cauchy.

Exemples de suites de Cauchy non convergentes : $x_n = 1 - 1/n$ dans $([0, 1[, us)$. Une suite de $\mathbb{Q}$ convergeant vers $\sqrt{2}$: de Cauchy et non convergente dans $\mathbb{Q}$.

Exercice. Soit (x_n) une suite de Cauchy. On considère une suite de réels $\varepsilon_n > 0$ quelconque. Alors, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que

$$d(x_{\phi(n+1)}, x_{\phi(n)}) \leq \varepsilon_n.$$

(On utilise souvent cette propriété avec $\sum \varepsilon_n < \varepsilon$.)

Définition. Un espace métrique (E, d) est *complet* si toute suite de Cauchy de (E, d) est convergente. Un EVN complet est appelé un *Banach*, un espace préhilbertien complet est appelé un *Hilbert*

Théorème 4.2. *L'espace* $\mathbb{R}$ *est complet.*

Démonstration. Une suite de Cauchy est bornée, admet une sous-suite convergente par BW, donc converge. □

Exercice. Si (x_n) et (y_n) sont deux suites de Cauchy de (E, d), la suite $(d(x_n, y_n))$ converge dans $\mathbb{R}$.

Remarque. La complétude est strictement reliée à la propriété d'existence de la borne supérieure. Ici la complétude découle de la borne supérieure (qui est à la base de la preuve de BW). On aurait pu introduire $\mathbb{R}$ en donnant une caractérisation où l'on insiste sur sa complétude. Dans ce cas, l'existence de la borne supérieure aurait été une conséquence de la complétude. Les deux propriétés sont équivalentes.

Remarque. On observe que

$$\text{BW} \Longrightarrow \text{complet}$$

donc on a l'énoncé suivant (on rappelle qu'on a démontré qu'un EVN de dimension finie satisfait BW, voir le corollaire 2.31).

Proposition 4.3. *Tout EVN de dimension finie est complet.*

Remarque. La notion de suite de Cauchy a-t-elle un intérêt dans un espace complet ? Oui, car elle permet de montrer qu'une suite converge sans connaitre la limite à priori. C'est l'outil fondamental de beaucoup de résultats d'existence.

Proposition 4.4. *Soit* (E, d) *un espace métrique et* A *une partie non vide de* E *munie de la distance induite.*

i. Si A *est complet alors* A *est fermée dans* E.

ii. Si E *est complet, alors* A *est complet si et seulement si* A *est fermée dans* E.

Démonstration. Évident (avec les suites). □

Corollaire 4.5. *Dans un EVN de dimension finie, les parties complètes sont les parties fermées.*

Corollaire 4.6. *Dans un EVN quelconque, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.*

Démonstration. Si F un sous-espace vectoriel de dimension finie il est complet donc fermé par la proposition. □

Théorème 4.7 (Caractérisation par les fermés)**.** *Un espace métrique* (E, d) *est complet si et seulement si pour toute suite de fermés* F_n *de* E *non vides, tels que* $F_{n+1} \subset F_n$ *et* $\mathrm{diam} F_n \to 0$*, il existe* $x \in E$ *tel que*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$$

Démonstration.

($\Longrightarrow$) Il existe $x : \mathbb{N} \to E$ telle que $x_n \in F_n$. Comme $x_m \in F_n$ pour tout entier $m \geq n$ et $\mathrm{diam} F_n \to 0$, la suite est de Cauchy. Soit ℓ sa limite dans E. Comme F_n est fermé, $\ell \in F_n$ pour tout n donc $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. De plus si $y \in F_n$ pour tout entier n alors $d(x, y) \leq \lim \mathrm{diam} F_n = 0$.

($\Longleftarrow$) Soit (x_n) une suite de Cauchy. Posons $F_n = \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$. Alors (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides. De plus $\mathrm{diam} F_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ tend vers 0 donc par hypothèse

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k \mid k \geq n\}} = \{x\}$$

en particulier Λ n'est pas vide. On rappelle que, grâce au théorème 3.18 Λ est l'ensemble des valeurs d'adhérence. Ceci implique que (x_n) admet une valeur d'adhérence (l'élément x). Comme (x_n) est de Cauchy cela entraine la convergence. □

Voici un théorème aux conséquences surprenantes (voir par exemple le corollaire qui suit).

Théorème 4.8 (théorème de Baire)**.** *Soit* (E, d) *un espace métrique complet.*

1) *Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

2) *Toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

Démonstration. La propriété (2) s'obtient par passage au complémentaire de la propriété (1), qu'on démontre ici.

Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de E et $O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Soit $x \in E$, $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver $y \in O \cap B(x, \varepsilon)$. On va définir une suite décroissante de boules fermées $\widetilde{B}(y_n, \varepsilon_n)$, de diamètre tendant vers 0 tels que $\widetilde{B}(y_n, \varepsilon_n) \subset O_n \cap B(x, \varepsilon)$.

A l'ordre 0 : comme O_0 est dense, il existe $y_0 \in B(x, \varepsilon) \cap O_0$. Comme O_0 est ouvert, il existe $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon/2$ tel que $\widetilde{B}(y_0, \varepsilon_0) \subset B(x, \varepsilon) \cap O_0$.

A l'ordre 1 : par densité de O_1 il existe $y_1 \in B(y_0, \varepsilon_0) \cap O_1$. Comme O_1 est ouvert il existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ tel que $\widetilde{B}(y_1, \varepsilon_1) \subset B(y_0, \varepsilon_0) \cap O_1$.

Récurrence : supposons définis $y_n \in E$ et $0 < \varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}/2$ tels que $\widetilde{B}(y_n, \varepsilon_n) \subset B(y_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap O_n$. La densité de O_{n+1} donne l'exisence de $y_{n+1} \cap B(y_n, \varepsilon_n) \cap O_{n+1}$. Comme O_{n+1} est ouvert il existe $0 < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n/2$ tel que $\widetilde{B}(y_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset B(y_n, \varepsilon_n) \cap O_{n+1}$.

On applique le théorème 4.7 aux $\widetilde{B}(y_n, \varepsilon_n)$:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{B}(y_n, \varepsilon_n) = \{y\}$$

De plus $y \in \widetilde{B}(y_n, \varepsilon_n) \subset O_n \cap B(x, \varepsilon)$ pour tout entier n donc $y \in O \cap B(x, \varepsilon)$. □

Corollaire 4.9. *Un EVN à base algébrique infinie dénombrable n'est jamais complet.*

Démonstration. On dit que E une base algérique s'il existe une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E telle que tout $x \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire finie des e_i. Soit $(E, \| \ \|)$ un EVN muni d'une base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme une somme $\Sigma_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n$ où les $\lambda_n \in \mathbb{R}$ sont tous nuls sauf un nombre fini). On définit les sous-espaces vectoriels $F_n = \mathrm{vect}(e_0, \ldots, e_n)$. Ils sont fermés dans E car de dimension finie.

On montre que l'intérieur de F_n est vide. Soit $x \in F_n$ et $y \in E \backslash F_n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $x + \varepsilon(y - x) \notin F_n$. On en déduit que $B(x, \varepsilon)$ n'est pas inclus dans F_n et donc que x n'est pas dans l'intérieur de F_n.

L'intérieur de F_n étant vide, si E est complet le théorème de Baire implique que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide, ce qui absurde. □

Remarque. On verra qu'il existe des EVN de dimension infinie complets (mais sans base dénombrable donc).

4.2 Espaces de fonctions

Soit (E, d), (F, δ) deux espaces métriques, $\mathcal{B}(E, F)$ l'ensemble des fonctions bornées de E dans F. On le munit de la distance

$$\sigma(f, g) = \sup_{x \in E} \delta(f(x), g(x)).$$

Théorème 4.10. *Si* (F, δ) *est complet, alors* $(\mathcal{B}(E, F), \sigma)$ *est complet.*

Démonstration. En 3 étapes. On construit un candidat limite $f(x)$ en appliquant la complétude à $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dans F, on montre que le candidat f est bien où il faut (dans $\mathcal{B}(E, F)$) puis que la suite f_n converge vers f comme il faut (c.-à-d., pour la distance σ).

Etape 1. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}(E, F), \sigma)$. Etant donné $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq n$,

$$\sigma(f_p, f_q) < \varepsilon$$

En particulier, pour $x \in E$, pour tout $p, q \geq n$,

$$\delta(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$$

La suite $(f_n(x))$ étant alors de Cauchy dans F complet, elle converge vers une limite qu'on appelle $f(x)$. On a donc convergence simple de (f_n) vers une fonction $f : E \to F$.

Etape 2. On montre que f est bornée. Fixons $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ comme au dessus. Par hypothèse f_n est bornée donc il existe $y \in F$ et $R > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $f_n(x) \in B_\delta(y, R)$. Alors pour tout $p \geq n$, $f_p(x) \in B_\delta(y, R + \varepsilon)$. Par passage à la limite , $f(x) \in \widetilde{B}_\delta(y, R + \varepsilon)$ donc f est bornée.

Etape 3. On fixe $\varepsilon > 0$ et on réécrit que (f_n) est de Cauchy. Pour tout $p, q \geq n$, pour tout $x \in E$,

$$\delta(f_p(x), f_p(x)) < \varepsilon$$

En fixant $p = n$ et en faisant tendre q vers $+\infty$, la continuité de δ implique

$$\delta(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in E$ donc $\sigma(f_n, f) \leq \varepsilon$. On a bien $\sigma(f_n, f) \to 0$ quand $n \to +\infty$. □

Corollaire 4.11. *L'EVN* $(C([a, b], \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ *est un Banach.*

Démonstration. $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), \sigma)$ est complet d'après le théorème car $\mathbb{R}$ est complet. Comme une limite uniforme de fonctions continues est continue, $C([a, b], \mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ muni de σ, donc complet pour la distance induite. On constate que la distance induite est la distance associée à $\| \|_\infty$. L'espace $(C([a, b], \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ est un donc un Banach. □

Proposition 4.12. *L'espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni des normes $\| \ \|_p$ n'est pas complet, pour tout $p \in [1,+\infty[$.*

Démonstration. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ sur $[0,1]$ telles que $f_n(x) = -1$ sur $[0, 1/2 - 1/n]$, $f_n(x) = nx - n/2$ sur $[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n]$ et $f_n(x) = 1$ sur $[1/2 + 1/n, 1]$.

Le reste de la preuve est un exercice.

Exercice. La suite est de Cauchy mais elle ne converge pas.

Solution. La suite est de Cauchy car, pour $n, m \geq N$, on a $\|f_n - f_m\|_p \leq 4/N$. Or $4/N$ tend vers 0.

Montrons que si f_n converge vers une fonction f, alors f satisfait forcement $f = -1$ sur $[0, 1/2]$ et $f = 1$ sur $[1/2, 1]$, ce qui est absurde. En effet, si $\|f_n - f\|_p$ tend vers 0, la restriction des intègrales à $[0, 1/2]$ (resp. $[1/2, 1]$), tend vers 0 donc f_n restreint à $[0, 1/2]$ (resp. $[1/2, 1]$), converge vers $f_{|[0,1/2]}$ (resp. $f_{|[1/2,1]}$) pour la norme $\| \ \|_p$ restreint à l'intervalle. Un calcul immédiat montre que $\|f_{n|[0,1/2]} + 1\|_p$ (resp $\|f_{n|[1/2,1]} - 1\|_p$) converge vers 0 donc par unicité de la limite dans $C([0, 1/2], \mathbb{R})$, (resp. $C([1/2, 1], \mathbb{R})$) $-1 = f_{|[0,1/2]}$ (resp. $1 = f_{|[1/2,1]}$). □

4.3 Théorèmes d'existence

4.3.1 Prolonger les fonctions uniformément continues

Rappelons qu'on dit $f : (E, d) \to (F, \delta)$ uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in E,\quad \text{si } d(x, y) \leq \eta \ \text{ alors } \ \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

On rappelle que toute application lipschitzienne est uniformément continue et qu'on a démontré que la continuité uniforme implique la continuité.

Voici un contre-exemple, et un exemple de fonction uniformément continue. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue mais pas uniformément continue. La racine carrée $[0, \infty[\to\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne.

On a démontré que la continuité uniforme sur E implique la continuité en tout point de E. Lorsque $E = [a, b]$ on verra que toute $f : E \to (F, \delta)$ continue est aussi uniformément continue (c'est vrai plus généralement si E est compact).

On fournit, sans le démontrer une caractérisation séquentielle de la continuité uniforme.

Théorème 4.13 (caractérisation séquentielle)**.** *On considère* $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$.

i. *La fonction f est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(x_n), (y_n)$ de E telles que $d(x_n, y_n)$ tend vers 0, $\delta(f(x_n), f(y_n))$ tend vers 0.*

ii. *Si f est uniformément continue, l'image par f d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.*

Remarque.

0) La condition réciproque de (ii) n'est pas valable. Considérer $x \mapsto x^2$, elle n'est pas uniformément continue mais elle transforme des suites de Cauchy en suites de Cauchy.

1) Le critère est pratique pour montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue. Exemple : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, en considérant $x_n = \sqrt{n}$ et $y_n = \sqrt{n} + \sqrt{1/n}$.

(2) Les suites de Cauchy et la complétude ne sont pas préservées par homéomorphisme. Exemple : l'application $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Or $]-1,1[$ n'est pas complet. De plus la suite $x_n = n$ est envoyée sur la suite $(\frac{n}{n+1})$, qui est de Cauchy.

Corollaire 4.14. *Soit (E,d) un espace complet et $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ un homéomorphisme tel que f^{-1} est uniformément continue. Alors F est complet.*

Définition. On dit que deux distances d_1 et d_2 sur E sont *uniformément équivalentes* si l'identité est uniformément bicontinu de (E,d_1) dans (E,d_2). C'est le cas de distances équivalentes, en particulier celles associées à des normes équivalentes

Corollaire 4.15. *Si (E,d_1) et (E,d_2) sont uniformément équivalentes, (E,d_1) est complet si et seulement si (E,d_2) est complet.*

Théorème 4.16 (Prolongement des applications uniformément continues)**.** *Soient (E,d) un espace métrique, $A \subset E$ une partie dense, (F,δ) un espace métrique complet. Soit une application $f\colon (A,d_A) \to (F,\delta)$ uniformément continue. Alors il existe une unique application $\widetilde{f} : (E,d) \to (F,\delta)$ uniformément continue telle que $\widetilde{f}_{|A} = f$.*

Démonstration. D'abord l'existence. Soit $x \in E$. Par densité de A il existe une suite (x_n) de A convergeant vers x. La suite (x_n) est de Cauchy dans A et f UC donc $f(x_n)$ est de Cauchy dans F. Comme F est complet elle converge, on appelle $\widetilde{f}(x)$ sa limite. La limite ne dépend pas du choix de la suite (x_n)

car si (y_n) est un autre suite de A convergeant vers x, $d(x_n, y_n)$ tend vers 0 donc $d(f(x_n), f(y_n))$ tend vers 0 par le théorème précédent. En particulier $\widetilde{f} = f$ sur A. Montrons que $\widetilde{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Par UC de f sur A il existe $\delta > 0$ tel que pour $x, y \in A$, $d(x, y) \leq \eta$ implique $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon/3$. Soit alors $x, y \in E$ tel que $d(x, y) \leq \eta/3$. Par densité de A et par définition de $\widetilde{f}$, il existe $x' \in A$, $y' \in A$ tel que $d(x, x') < \delta/3$ et $d(y, y') < \delta/3$, et tel que que $\delta(\widetilde{f}(x), f(x')) \leq \varepsilon/3$ et $d(\widetilde{f}(y), f(y')) \leq \varepsilon/3$. Comme $d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y') \leq \delta$ on a $d(f(x'), f(y')) \leq \varepsilon/3$. Alors

$$d(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(y)) \leq d(\widetilde{f}(x), f(x')) + d(f(x'), f(y')) + d(f(y'), \widetilde{f}(y)) \leq \varepsilon$$

Il reste à voir l'unicité : si g continue prolonge f sur E, elle coincide avec $\widetilde{f}$ sur une partie dense, donc lui est égale sur E d'après le théorème 2.18. □

Exercice. Si f est k-lipschitzienne, $\widetilde{f}$ aussi.

Corollaire 4.17. *Si F est un Banach, A un sous-espace vectoriel de E. Toute $f \in L_c(A, F)$ se prolonge en $\widetilde{f} \in L_c(\overline{A}, F)$.*

Démonstration. La construction de $\widetilde{f}$ ci-dessus entraine l'énoncé. On laisse en exercice la preuve de la continuité de $\widetilde{f}$. □

Exercice à faire en TD. Soit $f\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable.
1) Si f' est borné, f se prolonge en $\widetilde{f}$ UC sur $[a, b]$.
2) Si $f'(x) \to \ell$ quand $x \to a$, f se prolonge en $\widetilde{f}$ dérivable et $\widetilde{f}'(a) = \ell$.

4.3.2 Application : définition de l'intégrale.

Soit F un EVN.

Définition. On dit $f\colon [a, b] \to F$ est une *fonction en escalier* s'il existe $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \ldots < x_{n+1} = b$ et des constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n \in F$ telles que $f = c_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in \{0, \ldots, n\}$. On dit qu'une telle subdivision est admissible. On note $\mathcal{E}([a, b], F)$ l'espace des fonctions en escalier.

Lemme 4.18. *$\mathcal{E}([a, b], F], F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.*

Démonstration. Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b], F)$, $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_p = b\}$ une subdivision admissible de f et $\sigma' = \{a = x'_0, x'_1, \ldots, x'_q = b\}$ une subdivision admissible de g. Alors $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision admissible de f et de g : si

y, y' sont deux termes consécutifs de $\sigma \cup \sigma'$, l'intervalle $]y, y'[$ est contenu dans l'un des $]x_i, x_{i+1}[$ et dans l'un des $]x'_j, x'_{j+1}[$ (il est disjoint de σ et de σ' donc contenu dans le complémentaire de chaque, qui est une réunion d'intervalles ouverts disjoints) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est donc constante sur $]y, y'[$ (égale à $\lambda c_i + \mu c'_j$ avec les notations évidentes). □

Définition. Pour $f \in \mathcal{E}([a, b], F)$, on définit l'intégrale par

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) c_i \in F,$$

pour une subdivision admissible quelconque de f (étant données deux subdivisions admissibles σ et σ' de f, il est clair que $I(f)$ calculé sur σ coincide avec $I(f)$ calculé sur $\sigma \cup \sigma'$).

Proposition 4.19. *L'application $I \colon \mathcal{E}([a, b], F) \to F$ est linéaire et lipschitzienne de constante $b - a$.*

Démonstration. Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b], F)$, $\sigma = \sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{p+1} = b\}$ une subdivision commune à f et g, telle que $f = c_i$ et $g = c'_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. Alors

$$I(f+g) = \sum_{i=0}^{p} (x_{i+1} - x_i)(c_i + c'_i) = \sum_{i=0}^{p} (x_{i+1} - x_i) c_i + \sum_{i=0}^{p} (x_{i+1} - x_i) c'_i = I(f) + I(g)$$

De plus

$$\|I(f)\| \leq \sum_{i=0}^{p} (x_{i+1} - x_i) \|c_i\| \leq \sum_{i=0}^{p} (x_{i+1} - x_i) \|f\|_\infty = (b - a) \|f\|_\infty$$

□

Définition. On appelle *fonctions réglées* l'adhérence

$$\mathcal{R}([a, b], F) = \overline{\mathcal{E}([a, b], F)} \subset \mathcal{B}([a, b], F).$$

Si F est un Banach on définit l'intégrale $\widetilde{I}$ sur $\mathcal{R}([a, b], F)$ comme le prolongement uniformément continu de I.

Exercice. $C([a, b], F) \subset \mathcal{R}([a, b], F)$ (toute fonction continue est limite uniforme de fonctions en escalier, en utilisant que f est UC).

4.3.3 Dynamique et théorème du point fixe

Définition. Soit E un ensemble et f une application de E dans E. Pour $x \in E$, on appelle *orbite de x suivant f* la suite (x_n) de E définie par récurrence par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. On dit qu'un point $a \in E$ est un point fixe de f si $f(a) = a$.

Lemme 4.20. *Soit (E, d) un espace métrique et f une application continue de E dans E. Soit $x \in E$ et (x_n) son orbite suivant f. Alors si (x_n) est une suite convergente de E, sa limite est un point fixe de f*

Démonstration. Soit a la limite de (x_n). Alors a est aussi limite de la suite extraite $(f(x_n)) = (x_{n+1})$. Or, par continuité de f en a, $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. Par unicité de la limite, $a = f(a)$. □

Définition. Une application f de (E, d) dans lui même est *contractante* s'il existe $0 \leq k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y)$$

Autrement dit, si et seulement si elle est k-lipschitziènne pour un $k < 1$.

Théorème 4.21. *Soit (E, d) un espace métrique complet et f une application de E dans E contractante de constante k. Alors f possède un unique point fixe $a \in E$. De plus toutes les orbites des points de E suivant f convergent vers a, et si (x_n) est l'orbite de $x \in E$ suivant f alors $d(x_n, a) \leq k^n d(x, a)$.*

Démonstration. Soit $x \in E$ et (x_n) son orbite suivant f. On pour tout $n \in \mathbb{N}$ $d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n) \leq kd(x_{n+1}, x_n)$ d'où par récurrence $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. Alors pour $p > q \geq n$,

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \cdots + d(x_{q+1}, x_q) \\ &\leq (k^{p-1} + \cdots + k^q) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La suite étant de Cauchy elle converge vers $a \in E$ un point fixe de f. Soit $y \in E$ et (y_n) son orbite suivant f. On a $d(y_n, a) \leq k^n d(y, a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est trivialement vrai au rang $n = 0$ et découle de $d(y_{n+1}, a) = d(f(y_n), f(a)) \leq kd(y_n, a) \leq k^{n+1} d(y, a)$ par récurrence. La conclusion s'ensuit. □

Remarques. Les hypothèses sont nécessaires :
1) $(E, d) =]0, +\infty[$ n'est pas complet et $f(x) = x/2$ est contractante sans point fixe.
2) $(E, d) = (\mathbb{R}, us)$ et $f(x) = \ln(1 + \exp(x))$ satisfait $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ si $x \neq y$ mais n'a pas de point fixe.

4.3.4 Application : la méthode de Newton

Théorème 4.22 (méthode de Newton)**.** *Soit* $f\colon I \to \mathbb{R}$*, de classe* C^2*. On suppose que* f' *ne s'annule pas et qu'il existe* $u \in I$ *tel que* $f(u) = 0$*. Alors il existe* $\varepsilon > 0$ *avec la propriété suivante.*

Pour tout $x \in [u-\varepsilon, u+\varepsilon]$ *la suite* $x_0 = x$ *et pour* $n \geq 0$

$$x_{n+1} = \text{intersection de l'axe } Ox \text{ avec la tangente à } f \text{ en } (x_n, f(x_n))$$

a valeurs dans $[u-\varepsilon, u+\varepsilon]$ *et converge vers* u*.*

Démonstration. Tout d'abord on explicite la définition de la suite (x_n). On a $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. On pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, et on note que $x_{n+1} = g(x_n)$ et que $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$. Pour que (x_n) soit défini pour tout n il s'agit de trouver ε tel que $g([u-\varepsilon, u+\varepsilon]) \subset [u-\varepsilon, u+\varepsilon]$.

On constate ici que $f(u) = 0$ si et seulement si u est un point fixe de g.

On calcule

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

et on voit que $g'(u) = 0$, g est continue et on en déduit que pour ε assez petit on a que x, y dans $[u-\varepsilon, u+\varepsilon]$ satisfont $|f(x) - f(y)| \leq (1/2)|x-y|$. La suite (x_n) est donc définie pour tout entier n si $x \in [u-\varepsilon, u+\varepsilon]$. De plus g est 1/2-lipschitz sur l'intervalle, qui est complet car fermé. Le théorème du point fixe s'applique et x_n converge vers le point fixe de g, u. □

4.4 Séries dans les Banach

Définition. Une *série* d'un espace vectoriel E est une suite de couples $(x_n, X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de E tel que pourtout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. On appelle x_n le terme général de la série et X_n la somme partielle de rang n.

Notation. La série $(x_n, X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $\sum x_n$.

Définition. On dit qu'une série $\sum x_n$ d'un EVN E converge vers x si la suite (X_n) des sommes partielles converge vers x dans E. On note $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ la limite de la série. On dit que $\sum x_n$ satisfait la *condition de Cauchy* lorsque (X_n) est de Cauchy.

Remarque. Dans un Banach, la condition de Cauchy équivaut à la convergence de la série.

Définition. On dit qu'une série $\sum x_n$ d'un EVN $(E, \|\ \|)$ est *normalement convergente* si la série $\sum \|x_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}$. Cela revient à dire que $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Théorème 4.23. *Soit $(E, \| \ \|)$ un Banach et $\sum x_n$ une série de E normalement convergente. Alors $\sum x_n$ est convergente et pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\sum x_{\sigma(n)}$ converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.*

Remarque. On dit que la série est commutativement convergente. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est bien connue comme convergente mais pas commutativement (et pas normalement) convergente.

Démonstration. Puisque $\sum \|x_n\|$ converge, elle satisfait la condition de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $q > p \geq n_0$,

$$\sum_{k=p}^{q} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Or,

$$\|X_q - X_p\| = \| \sum_{k=p+1}^{q} x_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\|,$$

la suite (X_n) est donc de Cauchy. Comme E est complet elle converge.

On considère la deuxième partie de l'énoncé. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une permutation. Fixons $\varepsilon > 0$ et prenons $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $\|x - \sum_{k=0}^{n} x_k\| < \varepsilon$. Le fait que $\sigma\|x_n\|$ converge à une limite réel $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0'' tel que pour tout $m \geq n_0''$ on a

$$\sum_{k=m}^{+\infty} \|x_k\| := \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| - \sum_{k=0}^{k=m-1} \|x_k\| < \varepsilon.$$

On peut donc, pour tout $\varepsilon > 0$ trouver $n_0 = \max\{n_0', n_0''\} \in \mathbb{N}$ tel que pour $m \geq n_0$, $\|x - \sum_{k=0}^{m} x_k\| < \varepsilon$ et $\sum_{k=m}^{+\infty} \|x_k\| < \varepsilon$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n_1)\}$ contienne $\{0, 1, \ldots, n_0\}$ (il suffit en effet de prendre $n_1 = \max \sigma^{-1}\{0, \ldots, n_0\}$). Alors pour $m \geq n_1$,

$$\|x - \sum_{k=0}^{m} x_{\sigma(k)}\| \leq \|x - \sum_{k=0}^{n_0} x_k\| + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|x_k\| \leq 2\varepsilon$$

□

Corollaire 4.24. *Soit (f_n) une suite de fonctions de $C([a,b], \mathbb{R})$. Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$$

alors la suite $\sum_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Démonstration. La série $\sum f_n$ est normalement convergente dans le Banach $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. $\square$

Exercice. Soit (f_n) une suite de $C([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\sum \|f_{n+1} - f_n\|_\infty < \infty$. Alors la suite (f_n) converge uniformément vers $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.

On montre trois conséquences importantes du théorème 4.23 sur la convergence normale dans un espace de Banach.

4.4.1 Application 1 : l'application linéaire $(\mathrm{id} + u)^{-1}$

Tout d'abord on rappelle l'énoncé principal de la section §2.7. Grâce à la proposition 2.35, l'espace des applications linéaires et continues $L_c(E,F)$ d'un EVN E dans un EVN F est un espace vectoriel normé. La norme d'une application linéaire $f\colon E \to F$ est

$$|||f||| = \sup_{x \in \widetilde{B}_E(0,1)} \|f(x)\|_F.$$

Lorsque F est complet, on a la complétude de $L_c(E,F)$. Autrement dit, on a le théorème suivant.

Théorème 4.25. *Si F est un Banach, $L_c(E,F)$ muni de $|||\ |||$ est un Banach.*

Démonstration. En effet, soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L_c(E,F)$ selon la norme $|||\ |||$. Pour x dans E, la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de F. En effet, la norme de $f_p(x) - f_q(x)$ est majorée par $|||f_p - f_q|||$. La suite $(f_n(x))$ converge donc dans F vers un élément qu'on notera $f(x)$. Ainsi on définit une fonction $f\colon x \mapsto f(x)$ de E dans F. Cette fonction f est linéaire. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, tout x de E, tout y de E et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

On montre l'identité *via*

$$\|f(x+\lambda y)-f(x)-\lambda f(y)\| = \|f(x+\lambda y)-f_p(x+\lambda y)+f_p(x+\lambda y)-f(x)-\lambda f(y)\|$$

et la linéarité de f_p : $f_p(x + \lambda y) = f_p(x) + \lambda f_p(y)$. On obtient

$$\|f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\| \leq \\ \|f(x + \lambda y) - f_p(x + \lambda y)\| + \|f(x) - f_p(x)\| + \|f(y) - f_p(y)\|$$

Or on peut rendre le deuxième membre de cette inégalité plus petit que ε dès que p est assez grand. Comme le premier membre ne dépend pas de p, il doit être nul.

On montre enfin que (f_n) converge vers f dans $L_c(E, F)$ avec la norme $\|\| \ \|\|$. On montre d'abord que la convergence des $f_n(x)$ vers $f(x)$ est uniforme sur la boule unité fermée de E ; c.-à-d., on a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N, \ \forall p \geq N, \ \forall x \in \widetilde{B}(0, 1), \ \|f_p(x) - f(x)\| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N (dépendant de ε), tel que pour tout $p \geq N$ on a $\|\|f_p - f_q\|\| \leq \varepsilon$. Il en est donc de même de $\|f_p(x) - f_q(x)\|$ quand $\|x\|_E \leq 1$. Autrement dit on a que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tout $p \geq N$ on a, pour tout $x \in \widetilde{B}_E(0, 1)$, l'inégalité $\|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$. La limite par rapport à $q \to \infty$ entraine $\|f_p(x) - f(x)\| < \varepsilon$ pour $p \geq N$ indépendamment du choix de x dans $\widetilde{B}_E(0, 1)$. On déduit que f est continue (bornée sur la boule unité fermée). La propriété (4.1) montre que f est bien la limite des (f_n), dans l'EVN $(L_c(E; F), \|\| \ \|\|)$. □

On rappelle que la composée de deux applications linéaires f et g dans $L_c(E, E)$ est aussi (évidement) linéaire et continue ; on a aussi montré qu'on a

$$\|\|g \circ f\|\| \leq \|\|f\|\| \ \|\|g\|\|.$$

Pour une application linéaire $f = (\mathrm{id} + u)$ on montre comment construire l'application réciproque g telle que $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id_E}$. Avec un abus de notation, on écrit systématiquement gf pour la composée $g \circ f$ et u^k pour la composée $u \circ \cdots \circ u$ (k fois).

Proposition 4.26. *Si $u \in L_c(E, E)$, E un Banach, $\|\|u\|\| < 1$, alors $\mathrm{id} + u$ est bijective et l'application réciproque est donnée par la limite $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n$.*

Démonstration. Grâce au théorème 4.23 et à la condition $\|\|u\|\| < 1$, la série de terme général $(-1)^n u^n$ converge. On a

$$(\mathrm{id} + u) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k = \mathrm{id} - u^{n+1} \ \longrightarrow \ \mathrm{id} \qquad (\text{pour } n \to \infty).$$

Ceci entraine

$$(\mathrm{id} + u) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n = \mathrm{id}.$$

□

4.4.2 Application 2 : l'exponentielle d'une matrice

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$. Or A est un application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$; grâce au théorème 2.33 l'application linéaire A est aussi continue. On considère l'espace $M_N(\mathbb{R}^N)$ rappelée ci-dessus.

Théorème 4.27. *Pour tout $A \in M_N(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge dans $M_N(\mathbb{R})$. Ainsi, si on muni $M_N(\mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|$ on obtient une l'application entre EVN*

$$\begin{aligned}\exp\colon M_N(\mathbb{R}) &\to M_N(\mathbb{R})\\ A &\mapsto e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.\end{aligned}$$

De plus l'application est une application continue entre EVN et satisfait

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \|\frac{A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|} < \infty$$

donc la série converge normalement. De plus $M_N(\mathbb{R})$ muni de $\| \ \|$ est un Banach car de dimension finie. On a donc la convergence de la série dans $M_N(\mathbb{R})$ et l'inégalité en terme de $\| \ \|$ de l'énoncé.

On déduit que l'exponentielle d'une matrice est une application continue. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application définie par la somme partielle

$$\begin{aligned}f_n\colon M_N(\mathbb{R}) &\to M_N(\mathbb{R})\\ A &\mapsto e^A = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}.\end{aligned}$$

Il s'agit d'une application polynomiale et donc, en vertu de la proposition 2.15 d'une application continue. Pour chaque $A \in M_N(\mathbb{R})$ on vient de démontrer que

$$\|f_n(A) - \exp(A)\| \to 0 \qquad (\text{pour } n \to \infty).$$

Or, si on restreint exp et f_n à la boule $B_{\| \ \|}(0, r_0)(0, r_0)$ pour un réel $r_0 > 0$ arbitraire, on peut, pour tout réel $\varepsilon > 0$, détérminer N tel que pour tout $n \geq N$ la norme $\|f_n(A) - \exp(A)\|$ est inférieure à ε

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N, \ \forall n \geq N, \ \|f_n - \exp\| \leq \varepsilon.$$

En effet on à

$$\|f_n(A) - e^A\| \leq \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \sum_{n+1}^{\infty} \frac{r_0^k}{k!},$$

où le dernier terme ne dépend pas de la matrice $A \in B_{\| \ \|}(0, r_0)$ et tend vers 0 pour $n \to +\infty$ (cela suit, bien sûr, de la convergence de la série de terme général $r_0^n/n!$ vers $\exp(r_0)$). On a une convergence uniforme de la suite de fonction $f_n \colon B_{\| \ \|}(0, r_0)(0, r_0) \to M_N(\mathbb{R})$ (satisfaisant la condition analogue à celle de convergence uniforme de la section 1.5). On on déduit que $\exp \colon M_N(\mathbb{R}) \to M_N(\mathbb{R})$ est aussi une application continue en adaptant le schéma de la preuve du théorème 1.20 qui déduit la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues. □

Proposition 4.28. *Si $AB = BA$, $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.*

Démonstration. **Exercice à faire en TD.**

Corollaire 4.29. *Si $A \in M_N(\mathbb{R})$ est non nulle e^A est inversible d'inverse e^{-A}.*

□

Remarque. Les exponentielles de matrices interviennent dans la solution des équations différentielles linéaires. On montre que $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable de dérivée A et que si $X \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ satisfait $X'(t) = AX$ alors $X(t) = \exp(tA)X(0)$.

4.4.3 Application 3. Convergence absolue d'intégrale

Définition. Soit $f \colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue. On dit que $\int_0^\infty f$ est convergente si $\lim_{b\to\infty} \int_0^b f$ existe.

Proposition 4.30. *Pour que $\int_0^\infty f$ soit convergente, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t \geq 0$ tel que pour tous $x, y \geq t$, on ait*

$$\left| \int_x^y f(u)\ du \right| < \varepsilon$$

Démonstration. La nécessité est claire. Pour la suffisance, posons $X_n = \int_0^n f(u)\ du$. L'hypothèse implique que (X_n) est de Cauchy donc convergente dans $\mathbb{R}$ complet vers $\ell \in \mathbb{R}$. Soient $\varepsilon > 0$, $t > 0$ assez grand vérifiant l'hypothèse avec $\varepsilon/2$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $|X_n - \ell| < \varepsilon/2$ et $n \geq t$. Alors pour $b \geq n$ on a

$$|\int_0^b f(u)\ du - \ell| \leq |\int_0^n f(u)\ du - \ell| + |\int_n^b f(u)\ du| < \varepsilon.$$

□

Définition. On dit que $\int_0^\infty f$ est *absolument convergente* si $\int_0^\infty |f|$ est convergente.

Proposition 4.31. *Si $\int_0^\infty f$ est absolument convergente, elle est convergente.*

Démonstration. Si $\int_0^\infty |f|$ est convergente, pour $\varepsilon > 0$, il existe $t \geq 0$ tel que pour tous $x, y \geq t$, on ait

$$\int_x^y |f(u)|\, du < \varepsilon$$

mais alors $\left|\int_x^y f(u)\, du\right| \leq \int_x^y |f(u)|\, du < \varepsilon$ et on applique le précédent résultat. □

4.5 Théorèmes de projection

Dans cette section, E un espace préhilbertien, c.-à-d. un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Définition. Une partie C de E est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1], tx + (1-t)y \in C.$$

Théorème 4.32. *Soit $C \subset E$ un convexe, non vide, complet. Pour tout $x \in E$ on a les propriétés suivantes.*

1) Il existe un unique $p \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - p\|$.

2) L'élément p est l'unique point de C satisfaisant

$$\forall y \in C,\ \langle x - p, y - p\ \rangle \leq 0.$$

Démonstration. On prend une suite (x_n) de C telle que $d(x, x_n)$ converge vers $d(x, C)$. Si $y, z \in C$, l'identité du parallélogramme

$$\|A\|^2 + \|B\|^2 = \frac{1}{2}\|A + B\|^2 + \frac{1}{2}\|A - B\|^2$$

conduit, pour $A = x - y$ et $B = x - z$, à

$$\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = 2\|x - \frac{y+z}{2}\|^2 + \frac{1}{2}\|y - z\|^2 \geq 2d(x, C)^2 + \frac{1}{2}\|y - z\|^2$$

(on note que la convexité de C a été exploité dans la deuxième inégalité : $(y+z)/2 \in C$). Ainsi on obtient, pour $x_n = y \in C$ et $x_m = z \in C$,

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\left(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2 - 2d(x, C)^2\right).$$

Alors (x_n) est de Cauchy, donc converge vers $p \in C$. L'inégalité donne aussi l'unicité du point minimisant.

Pour 2) on pose, pour $y \in C$, $p_t = p + t(y - p)$ pour $t \in [0, 1]$. Alors

$$\|x - p_t\|^2 = \langle x - p, x - p\rangle - 2t\langle x - p, y - p\rangle + t^2\langle y - p, y - p\rangle \geq \|x - p\|^2$$

implique que $\langle x - p, y - p\rangle \leq \frac{t}{2}\langle y - p, y - p\rangle$ pour tout $t \in]0, 1]$ d'où $\langle x - p, y - p\rangle \leq 0$. Réciproquement, $\langle x - p, y - p\rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$ implique $\|x - p_t\|^2 \geq \|x - p\|^2$ et en particulier $\|x - y\|^2 \geq \|x - p\|^2$. Donc p est le projété de x. □

Corollaire 4.33. *On suppose que F est sous-espace vectoriel complet de E. Pour tout $x \in E$ on a les propriétés suivantes.*

1) Il existe un unique $p \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - p\|$.

2) L'élément $p \in F$ est l'unique point de F tel

$$\forall y \in F,\ \langle x - p, y - p\ \rangle = 0.$$

Démonstration. Pour $y \in F$ et $t \in \mathbb{R}$, le point $p_t = p + t(y - p)$ appartient à F pour tout t (ici le fait que F soi un espace vectoriel intervient de façon cruciale !). Or la fonction

$$t \mapsto \|x - p_t\|^2 = \|x - p\|^2 - 2t\langle x - p, y - p\rangle + t^2\|y - p\|^2$$

admet un minimum en $t = 0$. Sa dérivée s'annulle en $t = 0$ d'où $\langle x - p, y - p\rangle = 0$. Réciproquement, si $\langle x - p, y - p\rangle = 0$ pour tout $y \in F$ alors $\|x - y\|^2 = \|x - p\|^2 + \|y - p\|^2 \geq \|x - p\|^2$ donc p est le projeté de x. □

Le corollaire ci-dessus inspire la définition de projection orthogonale.

Définition. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E, on appelle projection orthogonale une application $P \colon E \to F$ telle que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, $\langle x - P(x), y\rangle = 0$.

Exercice. Montrer que dans ce cas $\|x - P(x)\| \geq \|x - y\|$ pour tout $y \in F$ avec égalité si et seulement si $y = P(x)$ (avec Pythagore !).

Le corollaire ci-dessus dit alors que dans le cas où F est un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert (préhilbertien et complet) alors on dispose de la projection orthogonale de E sur F. Ainsi on déduit l'énoncé suivant.

Corollaire 4.34. *Soit E un espace de Hilbert (un préhilbertien complet), F un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors F est complet, car il est fermé dans un espace complet, et on peut considérer la projection orthogonale*

$$P\colon E \longrightarrow F.$$

Son noyau est l'espace

$$F^{\perp} = \{y \in E \mid \langle y, x\rangle = 0 \ \forall x \in F\}$$

et on a

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, la distance $d(x, F)$ est donnée par la norme de $x - P(x)$.

Démonstration. Pour $x \in E$, on écrit simplement $x = P(x) + x - P(x)$ où $P(x)$. □

4.5.1 Application 1 : les coefficients de Fourier

Soit $E = C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Pour $r \in \mathbb{N}$, soit F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $x \mapsto \cos(kx)$, $x \mapsto \sin(kx)$, pour $0 \leq k \leq n$ (ces fonctions donnent une base orthogonale de F_n). L'espace F_n est complet car de dimension finie. Alors pout tout $f \in E$, il existe des réels a_k, b_k (coefficients de Fourier de f) tels que

$$d(f, F_n) = \|f - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\|.$$

On retrouve les coefficients en écrivant que $\langle f - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\rangle$ est orthogonal aux termes $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$.

Exercice. Calculer les coefficients.

4.5.2 Application 2 : le théorème de représentation de Riesz

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout élément $x \in E$, on définit la forme linéaire ℓ_x

$$\begin{aligned} \ell_x \colon E &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \ell_x(y) = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

On rappelle qu'on a montré dans la section §2.8 que pour tout forme linéaire ϕ on a

$$|\phi(x)| = \|\phi\| d(x, \ker \phi) \tag{4.2}$$

Lemme 4.35. *Pour tout $x \in E$ on a $\ell_x \in L_c(E, \mathbb{R})$ et*

$$\|\ell_x\| = \|x\|.$$

Démonstration. Si $x = 0$, alors $\ell_x = 0 \in L_c(E, \mathbb{R})$. Autrement ℓ_x est une application linéaire non nulle. L'espace $\ker \ell_x$ est fermé ; grâce au théorème 3.1 démontré en §2.8 on en déduit la continuité de ℓ_x. Le noyau de ℓ_x est fermé, donc complet. La projection orthogonale de x sur $\ker \ell_x$ est $0 \in E$, autrement dit $x \in (\ker(\ell_x))^\perp$. On à donc $d(x, \ker \ell_x) = \|x\|$ et, grâce à la proposition 2.38, $\|\ell_x\| = \|x\|$. □

Théorème 4.36 (de représentation de Riesz)**.** *On suppose que $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace de Hilbert. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \ell \colon E &\to L_c(E, \mathbb{R}), \\ x &\mapsto \ell_x \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. On montre facilement la linéarité. L'injectivité revient à démontrer que $\ker \ell = 0$; en effet si $\ell_x = 0$ alors $\|\ell_x\| = 0$ et grâce au lemme ci-dessus $\|x\| = 0$ et $x = 0$. Pour la surjectivité, on prend $\phi \in L_c(E, \mathbb{R})$ non nulle et $a \in E$ tel que $\phi(a) > 0$. Comme $\ker \phi$ est fermé, il est complet dans le Hilbert E. Le théorème de projection orthogonale donne un unique $p \in \ker \phi$ tel que $a - p$ est orthogonal à $\ker \phi$. On pose $x = \|\phi\| \frac{a-p}{\|a-p\|}$. On les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|\phi\| && \left(\text{car } \frac{a-p}{\|a-p\|} \text{ a norme } 1\right), \\ \|x\| &= d(x, \ker \phi) && (\text{car } x \in (\ker \phi)^\perp). \end{aligned}$$

On en déduit que $\phi = \ell_x$. On écrit y comme $A+B$ ou $A = (y - \phi(y)/\phi(x)x) \in \ker \phi$ et $B = \phi(y)/\phi(x)x$; ainsi le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ se reduit à $\langle x, B \rangle$ car $x \in (\ker \phi)^\perp$. On a

$$\ell_x(y) = \langle x, y \rangle = \langle x, \frac{\phi(y)}{\phi(x)} x \rangle = \phi(y) \frac{\|x\|^2}{\phi(x)} = \phi(y),$$

où on a utilisé (4.2) et le fait que $\phi(x) > 0$ (car $\phi(a) > 0$). $\square$

Chapitre 5

Espaces métriques compacts

5.1 Définition

Définition. Un espace métrique (E, d) est *compact* si toute suite de E admet une sous-suite convergente. Une partie A de E est compacte si (A, d_A) est compacte.

Notation. On dira qu'une suite qui admet une sous-suite convergente qu'elle *sous-converge.*

Exemple. L'intervalle $[a, b]$ est compact (par BW), $\mathbb{R}$ ne l'est pas (prendre $x_n = n$).

Théorème 5.1. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.*

i. Si A est compact alors A est fermé et borné dans E.

ii. Si E est compact et A est fermé dans E, alors A est compact.

iii. Si E est un EVN de dimension finie alors une partie A est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Démonstration.

i) On prend une suite (x_n) de A convergeant vers $x \in E$. Comme (x_n) sous-converge dans A, $x \in A$. Si A n'est pas bornée on construit une suite (x_n) de A telle que $d(x_0, x_n) \geq n$. Aucune de ses sous-suites ne converge car elles sont non bornées.

ii) On prend une suite (x_n) quelconque de A. Elle sous-converge dans E compact, sa limite reste dans A fermé donc elle sous-converge dans A.

iii) On a vu qu'une partie compacte est aussi fermée et bornée (point (i)). Réciproquement, on utilisé le faut que l'EVN E est de dimension finie, et donc satisfait BW (cf corollaire 2.31). Soit A une partie fermée et bornée de E. Une suite de A sous-converge dans E par BW, la limite est dans A fermé donc la suite sous-converge dans A. □

Exercice. Le produit $E_1 \times E_2$ est compact si et seulement si E_1 et E_2 sont compacts.

Théorème 5.2. *Soit $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ continue. Alors l'image par f d'un compact est un compact.*

Démonstration. Soit $A \subset E$ une partie compacte. On prend une suite (y_n) de $f(A)$, et on considère (x_n) dans A telle que $f(x_n) = y_n$. Comme A est compact, (x_n) sous-converge dans A vers $x \in A$ et la sous-suite image par f continue converge vers $f(x)$ dans $f(A)$. □

Corollaire 5.3. *Soit (E,d) compact et $f\colon (E,d) \to (\mathbb{R}, us)$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. L'image $f(E)$ est une partie compacte dans $\mathbb{R}$, donc une partie fermée et bornée. Alors la borne supérieure M de $f(E)$ est un nombre réel contenu dans $f(E)$ (il est dans l'adhérence de $f(E)$ qui est égale à $f(E)$). Ainsi, le nombre M s'écrit $f(x)$. Le même vaut pour m, la borne inférieure de $f(E)$ qui est aussi contenue dans $f(E)$. □

Exercice. Montrer que si A est une partie compacte de (E,d), alors pour tout $x \in E$, $d(x,A)$ est atteint.

La compacité est une propriété topologique. En effet on a l'énoncé suivant.

Corollaire 5.4. *Si $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ est un homéomorphisme, E est compact si et seulement si F est compact.*

Démonstration. Application immédiate du théorème 5.2. □

Corollaire 5.5. *L'espace S^1 n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Grâce au théorème 5.1, l'espace S^1 est compact car fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$. D'autre part $\mathbb{R}$ n'est pas compact. □

Corollaire 5.6. *Si (E,d) compact et $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ est bijective et continue, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration.

Exercice. □

Théorème 5.7 (théorème de Heine)**.** *Si (E,d) est compact et $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ est continue, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. On donne un démonstration par contradiction. On admet qu'il existe $\varepsilon > 0$, deux suites (x_n),(y_n) de E telles que $d(x_n, y_n)$ tend vers 0 mais $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La compacité de E permet de faire converger une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ vers $x \in E$. Alors $y_{\phi(n)}$ converge aussi vers x et $\delta(f(x_{\phi(n)}), f(y_{\phi(n)}))$ tend vers 0 par continuité de f en x et par continuité de la distance δ. □

5.1.1 Application du théorème de Heine : la continuité des intégrales à paramètres

Corollaire 5.8. *Soit I une partie ouverte de $\mathbb{R}$. Si $f\colon [a,b] \times I \to (\mathbb{R}, us)$ est continue, alors*

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\ dx$$

est continue sur I.

Démonstration. La question est locale. On considère $y_0 \in I$ et on admet qu'il existe $\eta > 0$ tel que $J = I \cap [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ soit un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Ainsi J est compact. Le théorème de Heine donne la continuité uniforme de f sur le compact $[a,b] \times J$. On prend alors $\varepsilon > 0$ et il existe $\alpha > 0$ (inférieur ou égal à η) qui rend vraie pour tout (x,y) et (x',y') dans $[a,b] \times J$, l'implication suivante

$$\|(x,y) - (x',y')\|_\infty \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

En particulier, pour $y \in I$ tel que $|y - y_0| < \alpha$, on a pour tout $x \in [a,b]$, $\|(x,y) - (x,y_0)\|_\infty < \alpha$ donc

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| = |\int_a^b f(x,y) - f(x,y_0)\ dx| &\leq \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\ dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Exercice à faire en TD. Soit (E,d) compact et $f\colon E \to E$.
1) On suppose que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ si $x \neq y$.

a) Montrer f a un unique point fixe a.

b) Soit $K \subset E$ fermé telle que $f(K) \subset K$, montrer que $a \in K$.

c) Montrer que pour tout x, la suite $f^n(x)$ converge vers a.

2) On suppose que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$. Montrer que f est une isométrie.

5.2 Compacité dans les EVN

Le résultat principal de cette section est la réciproque du thm 5.1 : un EVN où les compacts sont les fermés bornés est nécessairement de dimension finie. On démontre d'abord un résultat préparatoire.

Théorème 5.9. *Dans un EVN quelconque, les conditions suivantes sont équivalentes.*

i. La sphère unité est compacte.

ii. La boule unité fermée est compacte.

iii. Toute boule fermée est compacte.

iv. Les fermés bornés sont compacts.

Démonstration. Le fait que (i) implique (ii) est le seul point délicat (faire au moins (iii) $\Rightarrow$ (iv)). Soit (x_n) une suite de $\widetilde{B}(0, 1)$. S'il existe une sous-suite $x_{\phi(n)}$ identiquement nulle c'est gagné. Sinon, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. On considère alors pour $n \geq n_0$, $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \in S(0, 1)$. Par compacité de $S(0, 1)$ et de $[0, 1]$, il existe des sous-suites $y_{\phi(n)}$ convergeant vers $y \in S(0, 1)$ puis $\|x_{\phi(\psi(n))}\|$ convergeant vers $\lambda \in [0, 1]$. Alors $x_{\phi(\psi(n))} = \|x_{\phi(\psi(n))}\| y_{\phi(\psi(n))}$ converge vers λy. □

Théorème 5.10 (Riesz)**.** *Un EVN est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte.*

Démonstration. Le fait que la boule unité fermée est compacte découle du théorème 5.1, (iii). On se concentre sur l'implication réciproque : on admet que la boule unité fermée $\widetilde{B}(0, 1)$ est compacte et on démontre que E a dimension finie.

Etape 1. Montrons que si $\widetilde{B}(0, 1)$ est compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de rayon 1/2, c'est-à-dire il existe $x_1, \ldots, x_k$ dans $\widetilde{B}(0, 1)$ tel que

$$\widetilde{B}(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, 1/2).$$

(Cela marche aussi avec $\varepsilon > 0$ à la place de $1/2$.)

On prend x_1 dans $\widetilde{B}(0,1)$. Si $B(x_1, 1/2)$ ne recouvre pas, on prend $x_2 \in \widetilde{B}(0,1) \backslash B(x_1, 1/2)$. Si $B(x_1, 1/2) \cup B(x_2, 1/2)$ ne recouvre pas, on prend $x_3 \in \widetilde{B}(0,1) \backslash (B(x_1, 1/2) \cup B(x_2, 1/2))$, etc. Tant que $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1/2)$ ne recouvre pas, on peut choisir x_{n+1} dans le complémentaire. Par construction, $d(x_i, x_j) \geq 1/2$ si $i \neq j$. Si on peut définir x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une suite de $\widetilde{B}(0,1)$ sans sous-suite convergente. Ceci contredit la compacité de $\widetilde{B}(0,1)$, donc le procédé s'arrête avec un entier maximal $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\widetilde{B}(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1/2).$$

Etape 2. Notons F le sous-espace vectoriel de E engendré par les x_i et montrons que $F = E$.

Soit $x \in E$. Si $d(x,F) = 0$, $x \in F$ car F de dimension finie est fermé (corollaire 4.6). On suppose donc que $d(x,F) = d > 0$. Comme F vérifie BW, il existe $y \in F$ tel que $d(x,y) = d(x,F)$ (en considérant la limite d'une suite minimisante y_n dans le compact $\widetilde{B}_F(x, 2d(x,F)) \subset F$). On pose alors $a = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \widetilde{B}(0,1)$, donc $x = y + da$. Pour un x_i tel que $a \in B(x_i, 1/2)$ on pose $y' = y + dx_i \in F$. Alors

$$0 < d(x,F) \leq d(x,y') = d\|a - x_i\| < \frac{d(x,F)}{2},$$

une contradiction. Ceci termine la preuve du théorème. □

Remarque. On peut se passer de prendre y réalisant la distance, il suffit d'avoir $d(x,y) \leq \frac{10}{9} d(x,F)$ par exemple.

Exemple. Contre-exemples en dimension infinie.
1) Dans $(\ell^\infty, \| \ \|_\infty)$, la suite $u_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ avec le 1 en position n appartient à la boule unité fermée et n'a pas de sous-suite convergente car $d(u_n, u_m) = 1$ si $n \neq m$.
2) Dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$, la suite $u_n = x^n$. (Exercice.)

Remarque. La même argumentation que dans l'étape 1 montre qu'on peut toujours recouvrir un espace compact par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon > 0$. On appelle cette propriété pré-compacité (ou bien être totalement borné). On y reviendra dans la section suivante.

5.3 Compacité et topologie

Définition. Un *recouvrement ouvert* d'un espace métrique est une collection $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ d'ouverts U_i de E tels que $E = \cup_{i\in I} U_i$.

Définition. Un espace métrique a la propriété de *Borel-Lebesgue* si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini.

Ceci revient à dire que pour tout $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, U_i ouverts de E tel que $E = \cup_{i\in I} U_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $E = \cup_{i\in J} U_i$.

Définition. Un espace métrique (E, d) est *précompact* (ou bien *totalement borné*) si pour tout $\varepsilon > 0$, E peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

Ceci revient à dire que du recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (B(x, \varepsilon))_{x\in E}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Le but de cette section est de montrer les équivalences suivantes.

Théorème 5.11. *Soit (E, d) un espace métrique. Alors les condition suivantes sont équivalentes.*

i. L'espace (E, d) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue ;

ii. L'espace (E, d) est compact ;

iii. L'espace (E, d) est complet et pré-compact.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$. On raisonne par contradiction en supposant qu'il existe une suite (x_n) sans valeur valeur d'adhérence. Pour tout $x \in E$, x n'est pas valeur d'adhérence de (x_n) donc il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que

$$\{n \in \mathbb{N} | x_n \in B(x, \varepsilon_x)\}$$

est fini. On considère le recouvrement

$$\mathcal{U} = (B(x, \varepsilon_x))_{x\in E}.$$

D'après Borel-Lebesgue, on peut extraire un recouvrement fini de $\mathcal{U}$. Il existe donc $\{a_1, \dots, a_p\} \subset E$ tel que $E = \bigcup_{i=1}^{p} B(a_i, \varepsilon_{a_i})$. Comme $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(a_i, \epsilon_{a_i})\}$ est fini pour chaque i, on obtient que

$$\{n \in \mathbb{N} | x_n \in E\}$$

est fini, ce qui est absurde.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Tout d'abord la compacité entraine la complétude. En effet soit (x_n) une suite de Cauchy. Si elle sous-converge (compacité), alors elle converge car elle est de Cauchy. On montre enfin que (E,d) est pré-compact (ou bien totalement borné). Ceci revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement donné par un nombre fini de boules de la forme $B(x_i, \varepsilon)$ pour $i = 0, 1, \ldots, N$. On procède ainsi. Soit $x_0 \in E$; on considère $B(x_0, \varepsilon)$. Si E est inclus dans cette boule on a fini, sinon on continue en choisissant $x_1 \in E \setminus B(x_0, \varepsilon)$. Ainsi, pour $x_0, \ldots, x_n$ donnés on choisit x_{n+1} dans le complémentaire de $\cup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ lorsqu'il ne pas vide. Or, il existe $N \geq 0$ tel que le complémentaire de $\cup_{i=0}^{N} B(x_i, \varepsilon)$ est vide. Sinon la suite (x_n) satisferait $d(x_p, x_q) \geq \varepsilon$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ et ceci ne permettrait pas d'extraire des suites de Cauchy ; ce qui contredirait la compacité.

$(iii) \Rightarrow (i)$. On montre d'abord que grâce à la pré-compacité tout suite admet une sous-suite de Cauchy.

Lemme 5.12. *Si (E,d) est pré-compact, toute suite admet une sous-suite de Cauchy.*

Démonstration. Observons que pour tout recouvrement fini $E = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$, pour toute suite (x_n) de E, une des parties A_i au moins satisfait

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A_i\} \text{ est infini.}$$

Ceci revient à dire qu'il existe une sous-suite contenue dans l'un des A_i. On va considérer des recouvrements de plus en plus fins et des extractions successives. Fixons pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \subset E$ un ensemble fini tel que

$$E = \bigcup_{y \in X_k} B(y, \frac{1}{k})$$

D'après l'observation ci-dessus, pour toute suite (x_n) de E, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $y \in X_k$ et une sous-suite de (x_n) à valeurs dans $B(y, \frac{1}{k})$. Soit alors une suite $x = (x_n)$ de E, quelconque. Il existe donc $y_1 \in X_1$ et une sous-suite $x \circ \phi_1$ à valeurs dans $B(y_1, 1)$. De même, il existe $y_2 \in X_2$ et $x \circ \phi_1 \phi_2$ à valeurs dans $B(y_2, \frac{1}{2})$. On définit par récurrence $y_k \in X_k$ et $\phi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tels que

$$x \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_k(\mathbb{N}) \subset B(y_k, \frac{1}{k})$$

En particulier diam $x \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_k(\mathbb{N}) \leq 2/k$. On définit alors $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\Phi(0) = 0$ et pour $n \geq 1$, et $\Phi(n) = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n(n)$. Clairement Φ est strictement croissante. On considère alors la sous-suite $x \circ \Phi$. Pour tout $m \geq n$ on a $\Phi(m) \in \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n(\mathbb{N})$ donc

$$\operatorname{diam}\{x \circ \Phi(m) \mid m \geq n\} \leq \frac{2}{n}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La suite $x \circ \Phi$ est donc de Cauchy. $\square$

On va maintenant extraire d'un recouvrement $\mathcal{U}$ un recouvrement fini. Tout d'abord, pour tout entier positif m, on dispose d'un recouvrement $\mathcal{B}_m$ de E donné par un nombre fini de boules de rayon $1/m$. Pour chaque $x \in E$ il existe une boule $B(x, \varepsilon)$ contenue dans un ouvert U du recouvrement $\mathcal{U}$. Si on choisit m tel que $1/m < \varepsilon/2$ on peut aussi imposer que l'ouvert U contienne une boule B_x de $\mathcal{B}_m$. Comme l'ensemble $\cup_m \mathcal{B}_m$ est dénombrable cette procédure extrait un sous-recouvrement dénombrable

$$\mathcal{F} = \{B_x \mid x \in E\}$$

de $\cup_m \mathcal{B}_m$. Or, par construction, pour chaque élément F de $\mathcal{F}$ il existe (par construction) un ouvert $U_F \in \mathcal{U}$ contenant F ; on peut donc extraire de $\mathcal{U}$ un sous-recouvrement $\{U_F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Tout comme $\mathcal{F}$, ce recouvrement est dénombrable ; on peut donc l'écrire ainsi

$$\{U_1, \ldots, U_n, \ldots\}$$

(il suffit de choisir pour toute boule de $\mathcal{E}$ un ouvert de $\mathcal{U}$ qui la contient). Or ce recouvrement admet forcement un sous-recouvrement fini. Sinon on aurait une suite satisfaisant $x_n \notin \cup_{i=1}^n U_i$ pour tout n. Grâce au lemme, cette suite admet une sous-suite de Cauchy, donc une sous-suite convergente à ℓ grâce à la complétude de E. Soit U_h l'ouvert qui contient ℓ. Cela signifie que, pour n arbitrairement grand, on a $x_n \in U_h$, mais, par construction, x_n est hors de U_h dès que $n \geq h$. On a donc une contradiction ; il faut conclure que $\{U_1, \ldots, U_n, \ldots\}$ (et donc $\mathcal{U}$) admet forcement un sous-recouvrement fini. □

5.4 Théorème d'Ascoli

L'espace des fonctions continues

$$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$$

avec la norme $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ est un EVN de dimension infinie. Dans la section 5.2 nous avons illustré comme dans un EVN les compacts sont fermés et bornés ; cependant nous avons démontré que dans le cas ou la dimension est infinie il existe toujours des parties fermés et bornés qui ne sont pas compactes. Le corollaire 5.19 fournit, en particulier, une condition nécessaire et suffisante pour la compacité dans $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \| \|_\infty)$.

Le théorème qu'on présente dans cette section peut aussi être illustré à l'aide d'une question naturelle. Soit

$$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$$

une suite de fonctions continues et uniformément bornées ; c.-à-d. il existe M tel que $\|f_n\|_\infty \leq M$. On se demande sous quelle condition elle sous-converge dans la norme $\| \ \|_\infty$; c.-à-d. elle admet une sous-suite qui converge uniformément. Le corollaire 5.20 répond à cette question.

On considère l'adhérence dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ de l'ensemble $\mathcal{F} = \{f_n\}$. Pour répondre affirmativement à la question, il suffirait savoir que $\overline{\mathcal{F}}$ est compact. Cependant, $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est un EVN a dimension infinie ; ainsi le fait que $\overline{\mathcal{F}}$ soit fermé et borné ne suffit pas.

En effet il n'est pas difficile de construire des suites bornés qui n'admettent aucune sous-suite convergente dans la norme $\| \ \|_\infty$. Un exemple peut être donné comme suit.

$$f_n = \begin{cases} 2n(n+1)x - 2n & \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{2n+1}{2n(n+1)}, \\ -2n(n+1)x + 2(n+1) & \frac{2n+1}{2n(n+1)} \leq x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il s'agit de la fonction qui est non nulle seulement dans l'intervalle $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. Dans la première moitié de cet intervalle f_n croit linéairement de 0 à 1, tandis que dans la deuxième moitié elle descend linéairement de 1 à 0. Clairement la norme de ces fonctions vaut 1. D'autre part on a $\|f_n - f_m\| = 1$ si $n \neq m$. Ceci implique la non-existence d'une sous-suite convergente. En effet la suite considéré ne satisfait pas la condition de équi-continuité qui aurait garantit la sous-convergence (corollaire 5.20).

5.4.1 Équi-continuité

On défini la condition qui caractérise les familles fermés et borné qui sont aussi compactes dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On se situe dans le cadre général de l'ensemble F^E des fonctions de l'espace métrique (E,d) dans l'espace métrique (F,δ).

Définition. Une famille $\mathcal{F} \subset F^E$ de fonctions de E dans F, est *équi-continue* (EC) en $x_0 \in E$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \forall f \in \mathcal{F}, d(x,x_0) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Remarque. La constante ε dépend de x_0 et pas de f. Chaque $f \in \mathcal{F}$ est continue en x_0.

Définition. Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(E,F)$ est équi-continue sur tout E si $\mathcal{F}$ est équi-continue en x_0 pour tout $x_0 \in E$.

Exemple. Doit $k \geq 0$. Une famille d'applications k-lipschitziennes est equi-continue.

Définition. Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(E, F)$ est équi-uniformément continue sur tout E si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \forall f \in \mathcal{F}, d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

La proposition suivante peut être regardée comme une généralisation du théorème de Heine.

Proposition 5.13. *Si E est compact et $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(E, F)$ est équi-continue sur E alors $\mathcal{F}$ est équi-uniformément contine.*

Démonstration. Sinon il existe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n, y_n \in E$, $f_n \in \mathcal{F}$ tel que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $\delta(f_n(x_n), f_n(y_n)) \geq \varepsilon$. On extrait une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergeant vers $x \in E$. La suite $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers x et on a la contradiction en écrivant l'equi-continuité de $f_{\phi(n)}$ en x pour n assez grand. □

5.4.2 Le théorème d'Ascoli

On note

$$\sigma(f, g) = \max_{x \in E} \delta(f(x), g(x)).$$

dans $\mathcal{C}(E, F)$.

Théorème 5.14 (Ascoli). *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques compacts et soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(E, F)$ une famille de fonctions continues. Si $\mathcal{F}$ est fermée et équicontinue, alors $\mathcal{F}$ est compact dans $\mathcal{C}(E, F)$.*

Démonstration. On va montrer que $\mathcal{F}$ est pré-compact et complet, ce qui implique la compacité grâce au théorème 5.11.

Lemme 5.15. *L'ensemble $\mathcal{F}$ est pré-compact.*

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$.

On commence par utiliser la proposition 5.13 pour trouver $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in E, \forall f \in \mathcal{F}, d(x, x') \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon/4.$$

On utilise alors la (pré)compacité de E et de F pour trouver deux ensembles finis $X = \{x_1, \ldots, x_p\} \subset E$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_q\} \subset F$ tels que

$$E = \bigcup_{x \in X} B(x, \eta) \qquad \text{et} \qquad E = \bigcup_{y \in X} B(y, \varepsilon/4).$$

Clairement, pour tout $x \in X$ l'image $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ est contenue dans $\bigcup_{y \in Y} B(y, \varepsilon/4)$. On a donc un ensemble fini $X \subset E$ η-dense et un ensemble fini $Y \subset F$. On considère $Y^X = \{h \colon X \to Y\}$, l'ensemble fini des applications de X dans Y. Pour chaque $h \in Y^X$, on définit

$$\mathcal{F}_h = \{f \in \mathcal{F} \mid \forall x \in X, \delta(f(x), h(x)) < \varepsilon/4\}.$$

qui éventuellement est vide. S'il n'est pas vide, alors on peut choisir un élément $f_h \in \mathcal{F}_h$ qui par construction satisfait $\forall x \in X,\ \delta(f_h(x), h(x)) < \varepsilon/4$.

Alors, la pré-compacité suit de l'inclusion

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{\substack{h \in Y^X \\ \mathcal{F}_h \neq \varnothing}} B_\sigma(f_h, \varepsilon).$$

En effet, soit $f \in \mathcal{F}$. Pour chaque $x \in X$, il existe $h(x) \in Y$ tel que $f(x) \in B(h(x), \varepsilon/4)$. On définit ainsi $h \colon X \to Y$ in Y^X ; on a $f \in \mathcal{F}_h$ et $\mathcal{F}_h$ est non vide. Il existe alors $f_h \in \mathcal{F}_h$ qui clairement satisfait

$$\sup_{x \in X} \delta(f(x), f_h(x)) < \varepsilon/2$$

Montrons que $f \in B_\sigma(f_h, \varepsilon)$. Soit $x \in E$. Par définition de X il existe $x' \in X$ tel que $d(x, x') < \eta$. Alors

$$\begin{aligned}\delta(f(x), f_h(x)) &\leq \delta(f(x), f(x')) + \delta(f(x'), f_h(x')) + \delta(f_h(x'), f_h(x)) \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon\end{aligned}$$

On en déduit que $\sigma(f, f_h) < \varepsilon$ ce qui montre la précompacité de $\mathcal{F}$. $\square$

Lemme 5.16. *L'ensemble $\mathcal{F}$ est complet.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{F}$. Soit $x \in E$. Puisque $\delta(f_n(x), f_m(x)) \leq \sigma(f_n, f_m)$ la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans F. Or elle est contenue dans le compact F donc admet une sous-suite convergente et donc converge puisqu'elle est de Cauchy. Notons $f(x)$ sa limite dans F. On définit alors la fonction $f \colon E \to F$, limite simple de (f_n). La suite de l'argumentation est standard. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \sigma(f_p, f_q) < \varepsilon$$

donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in E, \delta(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$$

en passant à la limite quand $q \to \infty$ on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall x \in E, \delta(f_p(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

Ceci montre que $\sigma(f_p, f) \leq \varepsilon$ et donc que (f_n) converge vers $f \in (\mathcal{C}(E, F), \sigma)$. $\square$

La pré-compacité et complétude entrainent la compacité. □

On peut montrer facilement un résultat réciproque au précédent. La preuve n'est pas très difficile, mais on l'omet dans ces notes.

Théorème 5.17. *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(E, F)$ est compact alors $\mathcal{F}$ est équi-continue.* □

Le théorème de Ascoli implique avec l'énoncé précédent le corollaire suivant.

Corollaire 5.18. *Si (E, d) et (F, δ) sont compacts, la compacité de $\mathcal{F}$ équivaut à la fermeture et à l'équi-continuité.* □

Corollaire 5.19. *Si (E, d) est compact, $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(E, \mathbb{R}^n)$ est compact si et seulement si $\mathcal{F}$ est bornée, fermé et équicontinue.* □

Démonstration. La famille $\mathcal{F}$ est bornée, ses fonctions sont à valeurs dans une boule fermée $F = \widetilde{B}(0, M)$ dans $\mathbb{R}^n$ pour M suffisamment grand. On est donc dans les conditions du corollaire précédent car F est compact. □

Corollaire 5.20. *Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ uniformément bornés ($\exists M$ tel que $\|f_n\| \leq M \quad \forall n$). Si la suite est une famille équi-continue, alors il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})$ qui converge uniformément dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = \{f_n\}$. Alors la famille $\overline{\mathcal{F}}$ est fermée et équi-continue. Les fonctions ont valeurs dans l'espace compact $F = [-M, M]$. On a donc la compacité de $\overline{\mathcal{F}}$. Ceci revient à dire que (f_n) admet une sous-suite convergente. □

Exercice à faire en TD.

1) Soit (E, d) un espace compact et $f : E \to E$ telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$. Montrer que f est bijective.

2) Soit $G \subset \mathcal{C}(E, E)$ le groupe des isométries de (E, d) compact.

   a) Montrer que G est compact (commencer par montrer qu'il est fermé).

   b) Montrer que l'application $g \mapsto g^{-1}$ est continue de G dans G.

5.5 Le théorème de Stone-Weierstrass

Soit E un espace métrique, $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de E dans $(\mathbb{R}, us)$,

On remarque que cet espace vectoriel est muni d'une opération de multiplication : données f et g on note fg la fonction produit.

Définition. On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ est une *algèbre* si elle est stable par addition, multiplication et multiplication par un scalaire, c'est-à-dire

$$f + g \in \mathcal{A},\ fg \in \mathcal{A},\ \lambda g \in \mathcal{A},$$

pour tout $f, g \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque. En particulier, si $\mathcal{A}$ est une algèbre, $f \in \mathcal{A}$ et $P(x)$ est un polynôme à coefficients réels sans terme constant

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i,$$

alors on a $P(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f^i \in \mathcal{A}$.

Exemple.
1) L'ensemble des fonctions constantes.
2) Soit $x \in E$, $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R}), f(x) = 0\}$
3) Soient $x, y \in E$ et $x \neq y$, on pose alors $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R}), f(x) = f(y)\}$.
4) Si $E = [a, b]$, l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ (restriction à $[a, b]$ d'un polynome) est une algèbre.

Soit K un espace métrique compact, on considère la norme uniforme $\| \ \|$ sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

$$\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Lemme 5.21. *Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une algèbre, alors $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre.*

Démonstration. Si $f_n \to f$, $g_n \to g$ dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, alors on a

$$\|f_n g_n - fg\| \leq \|(f_n - f)g_n\| + \|f(g_n - g)\| \leq \|f_n - f\|\|g_n\| + \|f\|\|g_n - g\| \to 0.$$

Le reste est évident. □

Définition. On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ *sépare les points* de E si pour tout $x_0 \neq y_0 \in E$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que

$$f(x_0) \neq f(y_0).$$

Exemple.
1) Si $E = [a, b]$, l'algèbre des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ sépare les points de $[a, b]$. Si $x_0 \neq y_0 \in [a, b]$, on peut écrire

$$P(x) = \frac{x - x_0}{y_0 - x_0}.$$

2) Pour $x_0 \neq y_0 \in E$, $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}(E,\mathbb{R}), f(x_0) = f(y_0)\}$ ne sépare pas les points de E.

Théorème 5.22 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit K un compact, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ une algèbre qui sépare les points de K et qui contient les constantes. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Autrement dit, on a $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

Corollaire 5.23 (Weierstrass)**.** *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$.*

Le théorème implique le corollaire : l'algèbre des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ sépare les points de $[a,b] = K$, contient les constantes, donc $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ par le théorème.

Démonstration du théorème. La preuve comporte 5 étapes, dont 3 de préparation. Le but des deux premières étapes est de montrer que si $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{A}$, alors
$$\max(f_1,\ldots,f_n) \in \overline{\mathcal{A}}, \qquad \min(f_1,\ldots,f_n) \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Étape 1. *Il existe une suite de fonctions polynomiales $P_n(x)$ sur $[0,1]$ qui converge uniformément vers la fonction $\rho(x) = \sqrt{x}$.*

On définit une suite de fonctions polynomiales $(P_n(t))$ sur $[0,1]$ en posant $P_1 = 0$ et
$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{t - P_n(t)^2}{2}.$$
En écrivant $P_{n+1}(t) - \sqrt{t} = (\sqrt{t} - P_n)\left[-1 + \frac{\sqrt{t}+P_n}{2}\right]$, on montre par récurrence que $P_n(t) \leq \sqrt{t}$ et on en déduit que $P_{n+1}(t) \geq P_n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit alors que $P_n(t)$ converge simplement vers $\sqrt{t}$, puis uniformément avec Dini (en utilisant la condition $P_{n+1}(t) \geq P_n(t)$).

Étape 2. *Si $f, g \in \mathcal{A}$, alors $|f|, \max(f,g), \min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$*

Si $f \in \mathcal{A}$, $h = \frac{f^2}{\|f\|^2} \in \mathcal{A}$ et $\forall x \in K, h(x) \in [0,1]$. Alors, d'après l'étape 1
$$\frac{|f|}{\|f\|} = \sqrt{h} = \lim_{n\to\infty} P_n(h),$$

pour la convergence uniforme. Or si $P_n(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$,

$$P_n(h) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i h^i \in \mathcal{A},$$

vu que $\mathcal{A}$ contient les constantes et la remarque plus haut. Donc $\frac{|f|}{\|f\|} \in \overline{\mathcal{A}}$. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, $\overline{\mathcal{A}}$ aussi d'où $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. Pour le reste on a les formules

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$$

et

$$\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

En itérant on obtient que si $f_1, \dots f_n \in \mathcal{A}$, alors $\max(f_1, \dots, f_n) \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\min(f_1, \dots, f_n) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Étape 3. *Pour tout $x_0 \neq y_0 \in K$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que*

$$g(x_0) = \alpha, \qquad g(y_0) = \beta.$$

On prend $h \in \mathcal{A}$ tel que $h(x_0) \neq h(y_0)$ (car $\mathcal{A}$ sépare) et on a la formule

$$g(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{h(x) - h(x_0)}{h(y_0) - h(x_0)}.$$

Comme $\mathcal{A}$ contient les constantes, $g \in \mathcal{A}$.

Étape 4. *Soit $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, $x_0 \in K$, $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \overline{\mathcal{A}}$ tel que*

$$g(x_0) = f(x_0), \qquad g < f + \varepsilon, \ \textit{sur } K.$$

Pour chaque $y \in K$, $y \neq x_0$, l'étape 3 donne $g_y \in \mathcal{A}$ telle que

$$g_y(x_0) = f(x_0), \qquad g_y(y) = f(y) + \varepsilon/2.$$

Alors l'ensemble

$$U_y = \{z \in K, g_y(z) < f(z) + \varepsilon\}$$

est un ouvert contenant x_0 et y. Alors

$$K = \bigcup_{y \in K \setminus \{x_0\}} U_y,$$

c'est-à-dire que $(U_y)_{y\in K\setminus\{x_0\}}$ est un recouvrement ouvert de K. Par compacité de K, il existe $y_1,\dots,y_n$ tel que

$$K=\bigcup_{i=1}^{k} U_{y_i},$$

Alors $g:=\min(g_{y_1},\dots,g_{y_n})\in\overline{\mathcal{A}}$, d'après la conclusion de l'étape 2, et sur chaque U_{y_i},

$$g\le g_{y_i}<f+\varepsilon.$$

Donc $g<f+\varepsilon$ sur K.

Étape 5. *Soit $f\in\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, $\varepsilon>0$. Il existe $h\in\overline{\mathcal{A}}$ tel que*

$$f-\varepsilon<h<f+\varepsilon,\ \textit{sur } K.$$

Pour chaque $x\in K$, l'étape 4 donne $h_x\in\overline{\mathcal{A}}$ telle que

$$h_x(x)=f(x),\qquad h_x<f+\varepsilon,\ \text{sur } K.$$

L'ensemble

$$V_x=\{z\in K, f(z)-\varepsilon<h_x(z)\}$$

est ouvert et contient x. Les V_x formant un recouvrement ouvert de K compact, on prend $x_1,\dots,x_p\in K$ tel que

$$K=\bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}.$$

Alors $h:=\max(h_{x_1},\dots,h_{x_n})\in\overline{\mathcal{A}}$ d'après la conclusion de l'étape 2 et le fait que $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre. Clairement h satisfait

$$h<f+\varepsilon$$

sur K puisque chaque h_{x_i} le satisfait. D'autre part, pour tout $z\in K$, il existe $i\in\{1,\dots,p\}$ tel que $x\in V_{x_i}$, donc

$$f(z)-\varepsilon<h_{x_i}(z)\le h(z).$$

On conclut que $f-\varepsilon<h<f+\varepsilon$ sur K.

Conclusion : On a montré que $\overline{\mathcal{A}}$ est dense dans $C(K,\mathbb{R})$, ce qui prouve la densité de $\mathcal{A}$. □

Exercice. Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ non polynomiale. Soit (P_n) une suite fonctions polynomiales telle que P_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Alors la suite des degrés des P_n tend vers $+\infty$.