Le Théorème de Stone-Weierstrass

Soit (X,d) un espace métrique compact, et $C(X,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| = \max_{x\in X} |f(x)| \, .$$

On rappelle que $C(X,\mathbb{R})$ est un espace de Banach. Si $f, g \in C(X,\mathbb{R})$, on note $fg \in C(X,\mathbb{R})$ la fonction $x \mapsto f(x)g(x)$. Muni de cette loi de produit, l'espace vectoriel $C(X,\mathbb{R})$ devient une algèbre.

Définitions.
1) On dit qu'une partie $\mathcal{S} \subset C(X,\mathbb{R})$ est une *sous-algèbre* si, pour tous les $f, g \in C(X,\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f+g \in \mathcal{S}$, $fg \in \mathcal{S}$, et $\lambda f \in \mathcal{S}$.
2) On dit que $\mathcal{S}$ est une *sous-algèbre unitaire* si la fonction identiquement égale à 1 appartient à $\mathcal{S}$.
3) On dit que $\mathcal{S}$ *sépare les points* de X si, pour tous les $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{S}$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

Exemple : L'ensemble des fonctions polynomiales sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (où $a < b$) est une sous-algèbre unitaire qui sépare les points de $[a,b]$.

Remarques :
1) Si $\mathcal{S} \subset C(X,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre unitaire, alors pour tout $f \in \mathcal{S}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $P(f) \in \mathcal{S}$.
2) Si $\mathcal{S} \subset C(X,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre unitaire, alors l'adhérence $\overline{\mathcal{S}} \subset C(X,\mathbb{R})$ est encore une sous-algèbre unitaire (vérification facile).

Proposition (Théorème de Stone-Weierstrass)
Soit (X,d) un espace métrique compact et $C(X,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. Si $\mathcal{S} \subset C(X,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre unitaire qui sépare les points de X, alors $\mathcal{S}$ est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

Corollaire (Théorème d'approximation de Weierstrass)
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction polynomiale P telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \le \varepsilon \, .$$

Remarque : Le théorème de Stone-Weierstrass est vrai pour tout espace topologique compact séparé $(X,\mathcal{T})$, et la démonstration présentée ci-dessous couvre le cas général.

Preuve du théorème de Stone-Weierstrass.
La démonstration comporte 5 étapes, dont 3 de préparation. Le but des deux premières étapes est de montrer que, si $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \overline{\mathcal{S}}$, alors

$$(*) \qquad \max(f_1, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{S}}, \qquad \text{et} \quad \min(f_1, \ldots, f_n) \in \overline{\mathcal{S}} \ .$$

Étape 1 : *Il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) sur $[-1,1]$ convergeant uniformément vers la fonction $t \mapsto |t|$.*

Définissons cette suite par récurrence en posant :

$$\forall t \in [-1,1], \quad P_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [-1,1], \quad P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\big(t^2 - P_n(t)^2\big).$$

Il est facile de vérifier, par récurrence, que

$$(**) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [-1,1], \qquad 0 \leq P_n(t) \leq |t|.$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et l'hypothèse de récurrence montre déjà que $P_{n+1}(t) \geq 0$. D'autre part

$$\begin{aligned} |t| - P_{n+1}(t) &= |t| - P_n(t) - \frac{1}{2}\big(|t| - P_n(t)\big)\big(|t| + P_n(t)\big) \\ &= \big(|t| - P_n(t)\big)\Big(1 - \frac{1}{2}\big(|t| + P_n(t)\big)\Big) \geq 0 \end{aligned}$$

car $|t| + P_n(t) \leq 2|t| \leq 2$ sur $[-1,1]$. L'inégalité $(**)$ montre aussi que $P_{n+1}(t) \geq P_n(t)$, donc la suite $n \mapsto P_n(t)$ est croissante. C'est une suite croissante majorée de nombres réels, donc elle est convergente. Soit $u(t) = \lim_{n\to+\infty} P_n(t)$. La formule de récurrence pour P_n donne à la limite

$$u(t) = u(t) + \frac{1}{2}\big(t^2 - u(t)^2\big)$$

donc $u(t)^2 = t^2$, et comme $u(t) \geq 0$, on en déduit $u(t) = |t|$. Le théorème de Dini montre que la convergence est uniforme.

Étape 2 : *Si $f, g \in \mathcal{S}$, alors les fonctions $|f|$, $\max(f,g)$, et $\min(f,g)$ appartiennent à $\overline{\mathcal{S}}$.*

Montrons d'abord que, si $f \in \mathcal{S}$, alors $|f| \in \overline{\mathcal{S}}$. C'est évident si $f = 0$. Dans le cas contraire, on note $h = f/\|f\|_\infty$ et on observe que $h \in \mathcal{S}$ et $h(x) \in [-1,1]$ pour tout $x \in X$. Ainsi, d'après l'étape 1,

$$\frac{|f|}{\|f\|_\infty} = |h| = \lim_{n\to\infty} P_n(h) \ ,$$

la convergence étant uniforme sur X. Comme $P_n(h) \in \mathcal{S}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut que $|f|/\|f\|_\infty \in \overline{\mathcal{S}}$, donc $|f| \in \overline{\mathcal{S}}$. Soient maintenant $f, g \in \mathcal{S}$. Alors

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \in \overline{\mathcal{S}} \ , \qquad \text{et} \qquad \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2} \in \overline{\mathcal{S}} \ .$$

En itérant ce résultat on obtient les relations $(*)$ dans le cas où $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{S}$. Ceci entraîne le cas général, car on a vu que $\overline{\mathcal{S}}$ est encore une algèbre.

Étape 3 : *Pour tous les $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et tous les $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $g \in \mathcal{S}$ tel que $g(x) = \alpha$ et $g(y) = \beta$.*

En effet, comme $\mathcal{S}$ sépare les points de X, il existe $h \in \mathcal{S}$ tel que $h(x) \neq h(y)$. On pose alors

$$g(z) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{h(z) - h(x)}{h(y) - h(x)} = \lambda\, h(z) + \mu \ , \qquad z \in X \ .$$

Comme $\mathcal{S}$ contient les constantes, on a bien $g \in \mathcal{S}$.

Étape 4 : *Soient $f \in C(X, \mathbb{R})$, $x_0 \in X$, et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \overline{\mathcal{S}}$ tel que*

$$g(x_0) \;=\; f(x_0) \ , \qquad \textit{et} \quad g(x) \;<\; f(x) + \varepsilon \quad \textit{pour tout } x \in X \ .$$

En effet, pour chaque $y \in X \setminus \{x_0\}$, l'étape 3 fournit une fonction $g_y \in \mathcal{S}$ telle que $g_y(x_0) = f(x_0)$ et $g_y(y) = f(y)$. Comme g_y et f sont continues, l'ensemble

$$U_y \;=\; \{z \in X \,|\, g_y(z) < f(z) + \varepsilon\}$$

est un ouvert de X contenant x_0 et y. Il s'ensuit que la famille $\{U_y\}_{y \in X \setminus \{x_0\}}$ est un recouvrement ouvert de l'espace X, qui est compact. Par Borel-Lebesgue, il existe donc des points $y_1, \ldots, y_n \in X \setminus \{x_0\}$ tels que

$$X \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} \ .$$

Soit à présent $g = \min(g_{y_1}, \ldots, g_{y_n})$. Alors $g \in \overline{\mathcal{S}}$ d'après (1), et $g(x_0) = f(x_0)$. En outre, pour tout $x \in X$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in U_{y_i}$, donc $g(x) \leq g_{y_i}(x) < f(x) + \varepsilon$.

Étape 5 : *Soient $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in \overline{\mathcal{S}}$ tel que $f(x) - \varepsilon < h(x) < f(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in X$.*

En effet, pour chaque $x \in X$, l'étape 4 fournit une fonction $h_x \in \overline{\mathcal{S}}$ telle que $h_x(x) = f(x)$ et $h_x < f + \varepsilon$ sur tout X. L'ensemble

$$V_x \;=\; \{z \in X \,|\, f(z) < h_x(z) + \varepsilon\}$$

est un ouvert de X contenant x, et la famille $\{V_x\}_{x \in X}$ constitue un recouvrement ouvert de l'espace X, qui est compact. Par Borel-Lebesgue, il existe donc des points $x_1, \ldots, x_m \in X$ tels que

$$X \;=\; \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i} \ .$$

Soit maintenant $h = \max(h_{x_1}, \ldots, h_{x_m})$. Alors $h \in \overline{\mathcal{S}}$ d'après (1), et il est clair que $h(x) < f(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in X$ puisque $h_{x_i} < f + \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. D'autre part, pour tout $z \in X$, il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $x \in V_{x_i}$, donc

$$f(z) - \varepsilon \;<\; h_{x_i}(z) \;\leq\; h(z) \ .$$

On en conclut que $f(x) - \varepsilon < h(x) < f(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

Proposition (Théorème de Stone-Weierstrass complexe)
Soit (X, d) un espace métrique compact et $C(X, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme. On suppose que (i) $\mathcal{S} \subset C(X, \mathbb{C})$ *est une sous-algèbre unitaire sur* $\mathbb{C}$, (ii) *est stable par conjugaison* : $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{S}$, *et* (iii) $\mathcal{S}$ *sépare les points de X. Alors $\mathcal{S}$ est dense dans $C(X, \mathbb{C})$.*

Pour le voir, on considère l'ensemble des parties réelles

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{Re} f\,;\ f \in \mathcal{S}\}.$$

Comme $\mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$, $\mathrm{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}) = \mathrm{Re}(-if)$, on a $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{S}$, et en fait $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. L'ensemble

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \mathcal{S} \cap C(X, \mathbb{R})$$

est une sous-algèbre unitaire de $C(X, \mathbb{R})$ séparant les points, donc $\overline{\mathcal{S}}_{\mathbb{R}} = C(X, \mathbb{R})$ d'après le théorème de Stone-Weierstrass réel. Par décomposition d'une fonction $f \in C(X, \mathbb{C})$ en $f = u + iv$ avec u, v réelles, on en déduit que

$$f = u + iv = \lim(P_n + iQ_n) \quad \text{avec} \quad P_n, Q_n \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}\ , \quad R_n = P_n + iQ_n \in \mathcal{S},$$

donc $\overline{\mathcal{S}} = C(X, \mathbb{C})$.

Corollaire (Densité des polynômes trigonométriques)
Considérons dans $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ la sous-algèbre formée par les polynômes trigonométriques

$$\mathcal{S} = \Big\{P(x) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{inx}\,;\ N \in \mathbb{N},\ c_n \in \mathbb{C}\Big\}.$$

Alors $\mathcal{S}$ est dense dans $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

On sait que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est un espace compact (homéomorphe au cercle trigonométrique), et il est clair que $\mathcal{S}$ est une sous-algèbre unitaire stable par conjugaison et qui sépare les points du cercle [la propriété de sous-algèbre résulte du fait que $e^{inx}e^{imx} = e^{i(n+m)x}$, la stabilité par conjugaison du fait que $\overline{e^{inx}} = e^{-inx}$, et la propriété de séparation des points du fait que $x \mapsto e^{ix}$ est déjà une bijection de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur le cercle $S^1 \subset \mathbb{C}$). On déduit alors du théorème de Stone-Weierstrass complexe que les polynômes trigonométriques complexes sont denses pour la norme uniforme dans $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, c'est-à-dire dans les fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 2π.