**L3B – Topologie** **Examen du lundi 5 janvier 2015** **13h00-17h00**

*Documents, calculatrices, téléphones interdits.*
*Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.*
*Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.*

**A. Questions de cours** [5 points].

Soit $(E, d)$ un espace métrique (on pourra si on le souhaite se restreindre au cas d'un espace normé), et $A$ une partie de $E$.

**1)** Montrer que si $A$ est compacte, alors $A$ est complète.

**2)** Montrer que si $A$ est compacte, alors $A$ est fermée et bornée.

**3)** La réciproque de 2) est-elle vraie sous des hypothèses particulières pour $E$ ? Est-elle vraie en général ? Justifier la réponse.

**4)** Soit $(F, d')$ un autre espace métrique et $h : E \to F$ une application continue. Montrer que si $A$ est une partie connexe par arcs de $E$ alors $h(A)$ est une partie connexe par arcs de $F$.

**B. Exercice** [6 points] Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la partie $P$ formée de la réunion du rectangle $R = [0, 1] \times [-\varepsilon, 0]$ et des segments verticaux $S_n = \{2^{-n}\} \times ]0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$.

**1)** Représenter graphiquement la partie $P$ pour $\varepsilon = 1/4$.

**2)** Déterminer l'intérieur $P^\circ$ et l'adhérence $\overline{P}$ de $P$. On justifiera les résultats.

**3)** Comparer du point de vue de l'inclusion $P$, $\overline{P}$, $P^\circ$, $\overline{P^\circ}$, $(\overline{P})^\circ$.

**4)** $P$ est-elle compacte ? Est-elle connexe par arcs ? On justifiera les réponses.

**5)** Existe-t-il une application continue $f : P \to \mathbb{R}$ strictement positive sur les segments $S_n$ et strictement négative sur le rectangle $R$ ?

**6)** Soit $P'$ la partie définie de la même manière que $P$, obtenue en remplaçant $2^{-n}$ par $(2^{-n})^2 = 4^{-n}$ et $\varepsilon$ par une autre valeur $\varepsilon' > 0$. Trouver un homéomorphisme explicite $\varphi : P \to P'$ (en justifiant la propriété d'homéomorphisme).

**C. Exercice** [5 points] Soit $(E, \|\ \ \|)$ un espace normé. Si $A$, $B$ sont des parties de $E$, on désigne par $A + B$ l'ensemble des points de la forme $x + y$ avec $x \in A$, $y \in B$.

**1)** Si l'une des parties $A$, $B$ (disons $A$) est un ouvert, montrer que $A + B$ est un ouvert.

**2)** On suppose que $C$ est une partie convexe de $E$. Montrer que $\overline{C}$ est convexe (Indication : considérer une suite de segments $[x_n, y_n]$ avec $x = \lim x_n \in \overline{C}$ et $y = \lim y_n \in \overline{C}$, $x_n$, $y_n \in C$).

**3)** On suppose que $C$ est une partie convexe de $E$ d'intérieur non vide et soit $B(a, r)$ une boule ouverte contenue dans $C$. Pour tout $x \in C$ et tout $\varepsilon \in ]0, 1[$, montrer que la boule $B((1-\varepsilon)x+\varepsilon a, \varepsilon r)$ est contenue dans $C$ (faire un dessin – on pourra travailler dans $E = \mathbb{R}^2$ si on le souhaite).

**4)** Déduire de 3) que $\overline{C^\circ}$ contient $C$, puis que $\overline{C^\circ} = \overline{C}$. Montrer aussi que $C^\circ$ est convexe.

**5)** Donner un exemple de partie $A$ de $\mathbb{R}^2$ (non convexe !) telle que $\overline{A} = \mathbb{R}^2$ mais $\overline{A^\circ} = \emptyset$.

**D. Problème** [7 points]. On désigne par $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des applications continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

On considère l'application $\Psi : E \to E$ définie par

$$\Psi(f) = f_1, \qquad f_1(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On admettra (c'est évident d'après les propriétés de l'intégrale) que $\Psi$ est une application linéaire de $E$ dans $E$.

**1)** On note $u_0$ la fonction constante égale à 1. Calculer $u_1 = \Psi(u_0)$ et par récurrence $u_n = \Psi^n(u_0)$ où $\Psi^n$ désigne l'itérée $n$-ième $\Psi \circ \Psi \circ \ldots \circ \Psi$.

**2)** Si $f_1 = \Psi(f)$, montrer que l'on a $|f_1(x)| \leq C(x-a)$ où $C = \|f\|$. Montrer que $\Psi$ est continue et déterminer la norme $|||\Psi|||$.

**3)** On pose $f_n = \Psi^n(f)$. En utilisant 1), donner une majoration de $|f_n(x)|$ en fonction de $C = \|f\|$, et déterminer la norme $|||\Psi^n|||$.

**4)** On note $S = C^1([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $C^1$ sur $[a,b]$ (c'est-à-dire continues et ayant une dérivée continue sur $[a,b]$). On prendra ici $[a,b] = [-1,1]$. Montrer que

$$g_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$$

définit une fonction $g_n \in C^1([-1,1],\mathbb{R})$. Déterminer sa limite $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ et montrer que la limite est uniforme (Indication : étudier les variations de la différence $g_n - g$ sur $[0,1]$ ).
Le sous-espace $S = C^1([-1,1],\mathbb{R})$ est-il fermé dans $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ pour la norme uniforme $\|\ \ \|$ ? Est-il complet ?

**5)** Montrer que $\Psi$ est une bijection de $E = C([a,b],\mathbb{R})$ sur le sous-espace $S_0 \subset S$ des fonctions $h \in S$ telles que $h(0) = 0$, et déterminer l'application linéaire inverse $\Psi^{-1} : S_0 \to C([a,b],\mathbb{R})$.

**6)** On pose $h_n(x) = (x-a)^n$, $n \geq 1$. Calculer $\Psi^{-1}(h_n)$ et comparer les normes $\|h_n\|$ et $\|\Psi^{-1}(h_n)\|$. L'application linéaire $\Psi^{-1} : S_0 \to C([a,b],\mathbb{R})$ est-elle continue si on munit $S_0$ et $C([a,b],\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\ \ \|$ ?