L3B – Topologie **Vendredi 5 septembre 2014**

Connaissances de base - test (35 mn environ)

1. Placer les relations appropriées ($<$, $>$, $=$) pour les paires de nombres ci-dessous :

• $2,68 > 2,658$; $1.4 = 1,399999...$; $4/3 = 1,33333...$; $-2,091 > -3,13$

• A-t-on $2,0701070107010701... \in \mathbb{Q}$? oui, c'est le rationnel 20699/9999.

2. Soit E l'ensemble des entiers naturels pairs n'admettant aucun diviseur impair strictement supérieur à 1. Décrire l'ensemble E :

$E = \{2^n \,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

3. Soit k un entier ≥ 1 et M_k l'ensemble de ses multiples pairs non nuls. Déterminer les ensembles

• $\displaystyle\bigcup_{k\geq 7} M_k = \{2kp\,;\ k \geq 7, p \geq 1\} = \{2\ell\,;\ \ell \geq 7\} = \{14, 16, 18, ...\}$

• $\displaystyle\bigcap_{k\geq 7} M_k = \emptyset$ (clair !)

4. Étant donné deux propositions P et Q, on suppose que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.

• Que peut-on en conclure pour Q si P est vraie ? que Q est vraie

• Que peut-on en conclure pour Q si P est fausse ? rien

• Que peut-on en conclure pour P si Q est vraie ? rien

• Que peut-on en conclure pour P si Q est fausse ? que P est fausse

5. Traduire en termes de quantificateurs, de ε, δ (ou autres symboles !) les propriétés suivantes pour des fonctions et suites dans l'ensemble des réels :

• $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$:

$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

• $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$:

$\forall A > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq -A$.

6. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit T le domaine délimité par le triangle de sommets $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ et $C = (0, 1)$ (frontière incluse).

• Décrire l'ensemble T sous forme d'inégalités portant sur les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } x + 2y \leq 2\}$

• Décrire le complémentaire de T dans $\mathbb{R}^2$ sous forme d'inégalités (et de connecteurs logiques) :

$\complement T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x + 2y > 2\}$

7. On désigne par E un ensemble, $A \subset \mathcal{P}(E)$ un ensemble de parties de E et $x, y, z, ...$ des éléments. Comment exprimer en termes simples familiers (phrase claire en Français !) les affirmations logiques

• $\exists F \in A$, $\exists x, y \in F$, $x \neq y$

Il existe une partie F de A qui contient au moins 2 éléments

• $\exists G \in A$, $\forall x, y \in G$, $x = y$

Il existe une partie G de A qui est vide ou est un singleton $\{x\}$

8. Exprimer les négations des deux propositions du 7., sous forme quantifiée puis sous forme de phrase française courante.

• $\forall F \in A$, $\forall x, y \in F$, $x = y$

Toute partie F de A est vide ou est un singleton $\{x\}$

• $\forall G \in A$, $\exists x, y \in G$, $x \neq y$

Toute partie G de A contient au moins 2 éléments

9. Etant donné une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'on sait démontrer l'implication $P(n) \Rightarrow P(n + 3)$ si $n \geq 5$. Que convient-il de vérifier pour être sûr que $P(n)$ soit vraie pour tout $n \geq 2$?

Il convient de vérifier $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, car ensuite $P(n) \Rightarrow P(n + 3)$ pour $n \geq 5$ permet d'atteindre tous les rangs $n' \geq 8$.