L3B – Topologie **Lundi 29 septembre 2014**

Test (ajuster la durée en fonction du niveau de transpiration des étudiants !)

On justifiera complètement la réponse à chaque question ou calcul non trivial (deux à trois lignes maximum suffisent pour chaque item).

1. Démontrer précisément pourquoi $\sqrt[3]{7}$ n'est pas rationnel - on demande une preuve complète des arguments utilisés (pas juste l'application d'un théorème du cours, mais sa justification !).

2. Soit (x_n) la suite de réels définie par récurrence par $x_{n+1} = \dfrac{1+2x_n}{1+x_n}$ et $x_0 = 1$.

a) Évaluer x_1, x_2. Calculer $x_{n+1} - x_n$ en fonction de x_n, ainsi que $1 + x_{n+1} - x_{n+1}^2 = \dfrac{1}{(1+x_n)^2}(\ldots)$. En déduire le signe de $1 + x_n - x_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer que x_n est une suite croissante.

b) Utiliser les résultats de a) et les racines du trinôme $x^2 - x - 1$ pour trouver un encadrement précis de x_n. La suite (x_n) est-elle convergente dans $\mathbb{R}$? Si oui, quelle est sa limite ℓ ?

c) La suite (x_n) est-elle une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$? Est-elle convergente dans $\mathbb{Q}$?

d) Montrer que $1 + x_n - x_n^2 \leq \frac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire une valeur explicite de n (pas nécessairement optimale) pour que $|x_n - \ell| < 10^{-20}$.

3. a) Comparer $\mathrm{card}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{card}(\mathbb{C})$ en utilisant les résultats du cours.

b) Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable (on pourra commencer par l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[X]_{\leq n}$ des polynômes de degré $\leq n$).

c) Montrer que le sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ des nombres complexes “algébriques” (défini comme l'ensemble des racines complexes des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$) est dénombrable. En déduire que dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ il existe beaucoup de nombres non algébriques.

4. Soit (X, d) un espace métrique.

a) Montrer que pour tous points $x, y, z \in X$ on a $d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|$.

b) Soit $a \in X$. Montrer que la fonction $f : X \to \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = d(a, x)$ vérifie

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$$

et en déduire que f est continue en tout point $x_0 \in X$ si on munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle.

c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergeant vers une limite $\ell \in X$. Que peut-on dire de $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)$?