L3B – Topologie **Vendredi 5 septembre 2014**

Connaissances de base - test (30–40 mn environ) : répondre dans les espaces vides

Nom – prénom :

1. Placer les relations appropriées ($<$, $>$, $=$) pour les paires de nombres ci-dessous :

- $2,68 \quad 2,658$; $\quad 1.4 \quad 1,399999...$; $\quad 4/3 \quad 1,33333...$; $\quad -2,091 \quad -3,13$
- A-t-on $2,0701070107010701... \in \mathbb{Q}$ (oui/non/ne sais pas) ?

2. Soit E l'ensemble des entiers naturels pairs n'admettant aucun diviseur impair strictement supérieur à 1. Décrire l'ensemble E :

3. Soit k un entier ≥ 1 et M_k l'ensemble de ses multiples pairs non nuls. Déterminer les ensembles

- $\bigcup_{k\geq 7} M_k =$
- $\bigcap_{k\geq 7} M_k =$

4. Étant donné deux propositions P et Q, on suppose que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.

- Que peut-on en conclure pour Q si P est vraie ?
- Que peut-on en conclure pour Q si P est fausse ?
- Que peut-on en conclure pour P si Q est vraie ?
- Que peut-on en conclure pour P si Q est fausse ?

5. Traduire en termes de quantificateurs, de ε, δ (ou autres symboles !) les propriétés suivantes pour des fonctions et suites dans l'ensemble des réels :

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$
- $\lim_{n\to +\infty} u_n = -\infty$

6. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit T le domaine délimité par le triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ et $C = (0,1)$ (frontière incluse).

- Décrire l'ensemble T sous forme d'inégalités portant sur les coordonnées $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$T =$

- Décrire le complémentaire de T dans $\mathbb{R}^2$ sous forme d'inégalités (et de connecteurs logiques) :

$\complement T =$

7. On désigne par E un ensemble, $A \subset \mathcal{P}(E)$ un ensemble de parties de E et $x, y, z, ...$ des éléments. Comment exprimer en termes simples familiers (phrase claire en Français !) les affirmations logiques

- $\exists F \in A$, $\exists x, y \in F$, $x \neq y$
- $\exists G \in A$, $\forall x, y \in G$, $x = y$

8. Exprimer les négations des deux propositions du 7., sous forme quantifiée puis sous forme de phrase française courante.

-
-

9. Etant donné une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'on sait démontrer l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+3)$ si $n \geq 5$. Que convient-il de vérifier pour être sûr que $P(n)$ soit vraie pour tout $n \geq 2$?