Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels de degré > 0.
Montrer que $g(x) = |P(x)|$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |.|)$: le plan complexe $\mathbb{C}$ muni de la norme donnée par le module défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ si $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme à coefficients complexes de degré > 0.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = |P(z)|$.

a) Montrer que g est continue.

b) Montrer que $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = \infty$.

c) Montrer que $g(z)$ admet un minimum en un point $z_0 \in \mathbb{C}$.

d) Vérifier que $P(z_0) = 0$ [écrire $P(z_0+h) = P(z_0) + b_k h^k + \cdots + b_n h^n$].

Quel théorème avez-vous démontré ?

Connexité

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs. Montrer que $\mathbb{R}^2$ privé du cercle unité n'est pas connexe par arcs.

Exercice 4. Montrer que $]0,1[$ et $]0,1[^2$ ne sont pas homéomorphes. (Ce n'est pas un problème de "taille" puisque Peano a montré qu'il existe des applications continues et surjectives de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$.)

Exercice 5. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est connexe par arcs.

Exercice 6. 1) Soit A un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$ et x_0 un point de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $A - \{x_0\}$ est un ouvert connexe par arcs.

2) Soit A un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et D une partie dénombrable de A. Montrer que $A - D$ est connexe par arcs (on pourra exhiber une infinité non dénombrable de chemins disjoints reliant deux points de A).

Exercice 7. Soit $M_n(\mathbb{C})$ (resp. $M_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients complexes (resp. réels). Soient $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ les sous-ensembles composés des matrices inversibles.

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs dans $M_n(\mathbb{C})$ (on cherchera un chemin dans les matrices de la forme $\lambda M + (1-\lambda)Id$ et on pourra utiliser l'exercice précédent.

2) Que dire de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 8. Soient A et B deux ensembles d'un espace vectoriel normé.

1) On suppose que A et B sont connexes par arcs et on suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe par arcs. Que dire de $A \cap B$?

2) On suppose que A et B sont deux ouverts et que $A \cup B$ et $A \cap B$ sont connexes par arcs. Montrer que A et B sont connexes par arcs (indication : pour relier deux points de A, prendre un chemin h dans $A \cup B$ et considérer $t_1 = \inf\{t,\ h(t) \in B\}$ et $t_2 = \sup\{t,\ h(t) \in B\}$).

Exercice 9. On se place dans le plan muni de sa topologie habituelle. On pose

$$E = \left(\bigcup_{n\geq 1} \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \mathbb{R}_+ \ \cup\ \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \times \{n\} \right) \ \cup\ \{0\} \times \mathbb{R}_+ \ .$$

Représenter E. Montrer que E est connexe mais n'est pas connexe par arc.

Exercice 10. Montrer que $G = \{(x, \sin\frac{1}{x}),\ x > 0\} \ \cup\ \{0\} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ est connexe mais n'est pas connexe par arc.

Contrôle continu du 10 décembre 2012 9h-11h

Questions de cours [8 points] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1) Donner la définition d'une partie connexe par arcs A de E. Une partie A convexe est-elle connexe par arcs ? Justifier la réponse.

2) Si K est une partie compacte de E, à quelle condition une partie A de K est-elle compacte ? Est-ce que la frontière ∂K est compacte ? Justifier les réponses.

3) Si A et B sont deux compacts de E, montrer que $A \cup B$ est un compact.

4) Donner une condition suffisante pour que la réunion $A \cup B$ de deux parties A et B de E connexes par arcs soit connexe par arcs. Justifier.

Exercice 1. [6 points] On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |.|)$: le plan complexe $\mathbb{C}$ muni de la norme donnée par le module défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que les applications $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ et $g : z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$ sont continues.

Soit les trois parties de $\mathbb{C}$ muni de la norme $|.|$:

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad C' = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid |z - 3| = 2\} \quad \text{et} \quad B = C \cup C'.$$

2) Dessiner ces parties. Est-ce qu'elles sont compactes ? connexes par arcs ? Justifier.

3) Donner un exemple d'application continue surjective $\varphi : C \to B$.

4) Montrer que $B' = B \setminus \{1\}$ n'est pas connexe par arc [on pourra utiliser la fonction $z = x + iy \mapsto x - 1$].

5) Montrer que C et B ne sont pas homéomorphes.

Exercice 2. [4 points]

On considère dans $\mathbb{R}$ un compact $K \subset [0, 1[$. Pour tout entier $n > 0$, on note $K_n = \{x^n, \, x \in K\}$.

1) Justifier l'existence d'un réel positif $R < 1$ tel que pour tout $n > 0$, $K_n \subset B(0, R^n)$.

2) Est-ce que les ensembles K_n sont compacts ?

3) Montrer que l'ensemble $A = \{0\} \cup (\cup_{n>0} K_n)$ est compact.

Exercice 3. [12 points]

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, muni de la norme $||f|| = \sup\{|f(x)|, x \in [0, 1]\}$. On notera a la fonction identité de $[0, 1]$ i.e. $a(x) = x, \forall x \in [0, 1]$. On considère l'application $L : E \to E$ définie par $L(f) = af$ (produit de la fonction a par la fonction f) pour toute $f \in E$.

1) Montrer que L est un endomorphisme continu de $(E, ||.||)$ et déterminer $|||L|||$.

2) Est-ce que L est injective ?

3) Montrer que $||f||' = ||L(f)||$ définit une norme. En étudiant la convergence uniforme de la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par $\varphi_n(x) = x(1 - x)^n$ montrer que la norme $||.||'$ n'est pas équivalente à $||.||$.

4) Soit $F = L(E)$ (l'image de E). Est-ce que la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est dans F ?

5) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions g_n définie sur $[0, 1]$ par $g_n = \dfrac{nx}{n\sqrt{x} + 1}$. En déduire que F n'est pas fermé (pour la norme $||.||$).

6) Montrer que le sous-espace $G = \{f \in E | f(0) = 0\}$ est fermé. En appliquant le théorème de Weierstrass montrer que $\overline{F} = G$.

7) Est-ce que les espaces vectoriels normés $(F, ||.||)$ et $(G, ||.||)$ sont complets ?

8) Soient deux réels $a \le b$. Dans quels cas

$$B = \{f \in G | \; a \le f(x) \le b, \; \forall x \in [0, 1]\}$$

est-il fermé ? compact ?