Exercice 1. Ces espaces sont-ils compacts ?

1) Le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, partie de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$.

2) La sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$, partie de $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

3) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \frac{1}{x+1} \geq y \geq 0\}$, partie de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels que l'on munit de la norme $\|P\| = \max\{|a_i|, i = 0, ..., \deg(P)\}$ où $P = \sum_{i=0}^{deg(P)} a_i X^i$. Montrer que la boule unité fermée de $\mathbb{R}[X]$ est fermée bornée mais pas compacte.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite de réels.

1) On suppose que u_n converge vers l. Montrer que l'ensemble $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

2) On suppose seulement que u_n est bornée et on note V son ensemble de valeurs d'adhérence. Est-ce que l'ensemble $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup V$ est compact ?

Exercice 4. Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé et X et Y deux compacts de E. Montrer que $X \times Y$ est compacte dans $E \times E$ muni de la norme produit $\|(x, y)\|_{E \times E} = \max(\|x\|_E, \|y\|_E)$.

Exercice 5. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, et X une partie non vide de E.

1) Montrer que, lorsque X est compact, son diamètre $\mathrm{diam}(X) = \sup\{\|x - y\| \mid x \in X, y \in X\}$ est bien défini et atteint en un couple $(x_0, y_0) \in X^2$.

2) Si X est une partie fermée et Y une partie compacte non vide, montrer que si $X \cap Y = \emptyset$, la distance $d(X, Y) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in X, y \in Y\}$ est strictement positive.
Est-ce vrai si Y est seulement fermé ?

Exercice 6. Montrer que $[0, 1]^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Si $f \colon A \to F$ est continue injective et A compact alors $f^{-1} \colon f(A) \to A$ est continue.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme quelconque, montrer que l'union des éléments d'une suite convergente et de sa limite forme une partie compacte.

Exercice 9. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, K une partie compacte de E, et $f : K \to K$ telle que $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tous $x, y \in K$, $x \neq y$. Montrer que f a un unique point fixe (*indication* : considérer $x \mapsto \|x - f(x)\|$).

Exercice 10. Soient $(X, \| \cdot \|_X)$, $(Y, \| \cdot \|_Y)$ des espaces vectoriels normés, A une partie de X, B une partie de Y et f l'application de première projection de $A \times B$ dans A. Montrer que, si C est un fermé de $A \times B$ et si B est compact, alors $f(C)$ est fermé.

Exercice 11. Soient $(X, \| \cdot \|_X)$, $(Y, \| \cdot \|_Y)$ des espaces vectoriels normés, A une partie de X, B une partie de Y et f une application de A dans B. Montrer que, si le graphe de f est fermé (dans $X \times Y$) et si B est compact, alors f est continue.

Exercice 12. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, K une partie compacte de E, et $f : K \to K$ une application dilatante, *i.e.* : $\forall x, y \in K, \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$.

1) On veut montrer que f est une isométrie : $\forall x, y \in K, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

   a) Montrer qu'il existe une extraction φ telle que $(f^{\varphi(n)}(x))_n$ et $(f^{\varphi(n)}(y))_n$ convergent.

   b) Montrer que $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x))_n$ converge et identifier sa limite.

   c) En déduire que la suite $\left(\|f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) - f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)\|\right)_n$ converge et identifier sa limite.

   d) En déduire que f est une isométrie.

2) Montrer que f est surjective (*indication* : considérer $\|f^{\varphi(n+1)}(x) - f^{\varphi(n)}(x)\|$).