Topo B 2012-2013 **Feuille d'exercices 6**

Exercice 1. On munit $X = C^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ associée à la convergence uniforme.
1) Montrer que l'ensemble $A = \{f \in X,\ f$ ne s'annule pas sur $[0,1]\}$ est un ouvert de X. Donner son intérieur, son adhérence et sa frontière.
2) Montrer que l'ensemble $B = \{f \in X,\ f$ s'annule en $x_0 = 1/2\}$ est un fermé de X. Donner son intérieur, son adhérence et sa frontière.
3) Montrer que l'ensemble $C = \{f \in X,\ f$ s'annule quelque part $\}$ est un fermé de X. Donner son intérieur, son adhérence et sa frontière.
4) Que penser de l'ensemble $D = \{f \in X,\ f$ s'annule une fois et une seule sur $[0,1]\}$? Montrer que son intérieur est vide et que son adhérence est l'ensemble $\{f \in X,\ \exists\ x_0 \in [0,1],\ f(x_0) = 0$ et f est soit négative ou nulle, soit positive ou nulle sur chacun des segments $[0,x_0]$ et $[x_0,1]\}$.
5) On considère l'ensemble $E = \{f \in X,\ f$ est dérivable en $x_0 = 1/2\}$. Montrer que son intérieur est vide (on pourra ajouter à $f \in E$ une petite fonction continue bien choisie). Montrer que E est dense dans X (pour $f \in X$, on pourra approcher f par une fonction affine sur un petit intervalle $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ bien choisi). L'ensemble E peut-il être fermé ou ouvert dans X ?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé.
1) Soit $(A_n)_{n=1,\dots,N}$ une famille finie de sous-ensembles de E. Montrer que $\overline{\cup_{n=1\dots N} A_n} = \cup_{n=1\dots N}\overline{A_n}$.
2) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-ensembles de E. Montrer que $\overline{\cup_{n\geq 0} A_n}$ n'est pas forcément égal à $\cup_{n\geq 0}\overline{A_n}$.

Exercice 3. On munit le plan de la norme euclidienne. Montrer que le carré ouvert $]0,1[\times]0,1[$ n'est pas une union finie de boules ouvertes (indication : on montrera que le carré fermé n'est pas réunion finie de boules fermées).

Dans les quatre exercices suivants, E est un espace vectoriel normé quelconque et A et B sont des parties de E.

Exercice 4. 1) Montrer que si A est bornée, alors son intérieur $\overset{\circ}{A}$ et son adhérence $\overline{A}$ le sont aussi.
2) Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{x\in A} B(x,\frac{1}{n})$.
3) Montrer que si A est ouvert, alors sa frontière ∂A est d'intérieur vide. Donner un contre-exemple lorsque A n'est pas ouvert.
4) On suppose que A et B sont deux ouverts disjoints, montrer que $\overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\overset{\circ}{\overline{B}}$ sont disjoints. Donner un contre-exemple lorsque A et B ne sont pas ouverts.

Exercice 5. Pour tout $A \subset E$, on définit $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.
1) Montrer que si $A \subset B$ alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.
2) Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$, et $\overset{\circ}{A} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$.
3) Montrer que $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.
4) Montrer par des exemples qu'il n'existe pas d'inclusion entre $\alpha(A)$ et $\beta(A)$.
5) Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ telle que A, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$, $\alpha(\overset{\circ}{A})$ et $\beta(\overline{A})$ soient tous deux à deux distincts.

Exercice 6. 1) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
2) Montrer que, si A est ouvert, alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Donner un contre-exemple si A n'est pas supposé ouvert.
3) Donner un exemple d'ouverts A et B tels que $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient deux à deux distincts.

Exercice 7. On note $A + B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$.
1) Montrer que si A ou B est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.

2) Montrer que si A et B sont fermés, alors $A+B$ n'est pas nécessairement fermé. (On pourra prendre $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = e^x\}$ et $B = \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\}$)

Question de cours : [2 points] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R}^n \to E$ une application linéaire. Montrer que f est continue de $(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty)$ dans $(E, ||.||)$.

Exercice 1. [2 points] Soit sur $\mathbb{R}^2$ la forme linéaire $f(x, y) = 2x - y$. Déterminer $|||f|||$ dans le cas où $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $||.||_1$.

Exercice 2. [2 points] Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,\big|\, P(0) = 0\}$ (espace des polynômes à coefficients réels nuls en 0) muni de la norme $||P|| = \sup\{|P(t)| \,\big|\, t \in [0, 1]\}$. Soit g la forme linéaire définie par $g(P) = P(1/2)$. Montrer que g est continue sur $(E, ||.||)$ et déterminer $|||g|||$.

Exercice 3. [2 points] Soit $(E, ||.||)$ l'espace vectoriel normé où $E = C^0[0, 1]$ (espace des fonctions continues sur $[0, 1]$) et $||h|| = \sup\{|h(t)| \,\big|\, t \in [0, 1]\}$.

Soit $\varphi : E \to E$ l'endomorphisme défini par $\varphi(h)(t) = \displaystyle\int_0^t h(u)du$.

Montrer que φ est continu et déterminer $|||\varphi|||$.

Exercice 4. [8 points] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés ? Justifier dans chaque cas.

1) $A_1 = B(0, 1) \setminus \{0\}$.

2) $A_2 = \cup_{0<r<1}\overline{B}(0, r)$ (où $\overline{B}(0, r)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon r).

3) $A_3 = \overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}$.

4) Déterminer l'adhérence de $B(0, 1)$.

Exercice 5. [2 points]

Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y) \,\big|\, y = 0 \text{ ou } x \in \mathbb{N}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$ muni par exemple de $||.||_\infty$ [on pourra considérer la fonction $f(x, y) = y \sin(\pi x)$].