Développement décimaux et convergence

Exercice 1. Pour un $x \in [0,1]$, on note $0, a_1 \cdots a_n \cdots$ l'écriture décimale de x.
Soit $K = \{x \in [0,1] | \forall i,\ a_i \text{ impair}\}$.

a) Déterminer $\inf K$ et $\sup K$.

b) Soit (u_n) une suite croissante d'éléments de K. Montrer que (u_n) converge dans K.

c) En déduire qu'une suite convergente (u_n) d'éléments de K converge vers un élément de K (on dit que K est fermé).

Exercice 2. On définit la fonction $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ de la façon suivante si $0, a_1 \cdots a_n \cdots$ est le développement décimal *propre* de x, le nombre $f(x)$ est celui qui a $0, a_1\, 0\, a_2\, 0\, a_3\, 0 \cdots a_n\, 0 \cdots$ pour écriture décimale.

a) Montrer que f est strictement croissante.

b) Déterminer les points de discontinuité de f.

c) Montrer que f est continue à droite

Exercice 3. Soit S l'ensemble des suites croissantes d'éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

a) Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \frac{1}{q_0 \cdots q_n}$$

est convergente et que sa limite appartient à $]0,1]$.

b) Montrer que l'application de S dans $]0,1]$ qui à $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ associe $\lim x_n$ est une bijection.

c) Montrer que $\lim x_n$ est rationnel si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq k \quad q_n = q_k$$

d) En déduire que le nombre e est irrationnel.

Continuité uniforme

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
Montrer qu'il existe $a, b \geq 0$ tels que $|f(x)| \leq a|x| + b$.
En déduire que pour $\alpha > 1$ la fonction $f(x) = x^\alpha$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continues et bornées.
Montrer que fg est uniformément continue.
Donner un contre-exemple quand on ne suppose plus que f et g sont bornées.

Exercice 6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *lipschitzienne de rapport* $k > 0$ si pour tous $x, y \in I$, on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

a) Montrer que si f est lipschitzienne de rapport $k > 0$, elle est uniformément continue.

b) On considère une fonction f dérivable dont la dérivée f' est bornée. Montrer que f est lipschitzienne pour un certain rapport $k > 0$.

c) Est-ce que les fonctions x^2, e^{-x^2}, $x + \sin x$, $x \sin x$ définies sur $\mathbb{R}$ sont lipschitziennes ?

d) Donner un exemple de fonction f continue sur $[0,1]$ mais qui n'est pas lipchitzienne.

Limites simples et uniformes de fonctions

Exercice 7. Donner la limite des suites de fonctions suivantes et dire si cette limite est simple ou uniforme.

1) $f_n(x) = xe^{-nx},\ x \geq 0,\ n \in \mathbb{N}$.

2) $f_n(x) = n^2 x$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$; $f_n(x) = n^2(\frac{2}{n} - x)$ si $x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \geq \frac{2}{n}$.

3) $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n}),\ x \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 8. Pour $n \geq 2$, calculer l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ où f_n est la fonction définie dans le 2) de l'exercice précédent. Quelle est la limite de I_n ? Qu'en conclure ?

Exercice 9. Premier théorème de Dini
On dit qu'une suite de fonctions (f_n) à valeurs réelles est croissante si $n \geq p$ implique que pour tout x, $f_n(x) \geq f_p(x)$. On s'intéresse au théorème suivant :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$. Si cette suite converge simplement vers une fonction f et que cette limite f est continue sur [0,1], alors la suite (f_n) converge uniformément vers f.

1) Donner un contre-exemple au théorème si on retire l'hypothèse que la suite (f_n) est croissante.

2) Donner un contre-exemple au théorème si on retire l'hypothèse que la limite f est continue.

3) On raisonne par l'absurde : montrer que si le résultat est faux, on peut trouver $\varepsilon > 0$, une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une suite de points $x_n \in [0,1]$ tels que pour tout $n \geq 0$, $|f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$.

4) Prouver le théorème de Dini (indication : quitte à extraire une sous-suite, on supposera que (x_n) converge vers $x \in [0,1]$ et on appliquera la définition de la continuité en ce point).

Exercice 10. Escalier du diable ou de Cantor
Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ par

$f_0(x) = x$ et, pour $n \geq 0$, la relation de récurrence $f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$

1. Tracer sur un même graphique les graphes de f_0, f_1, f_2.
2. Montrer que chaque f_n est continue et croissante.
3. On considère la série de fonctions de terme général $u_n = f_n - f_{n-1}$ $(n > 0)$. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement.
4. En déduire que la suite f_n converge uniformément vers une fonction f continue et croissante.