Suites, suites extraites

Exercice 1. Montrer que toute suite convergente de nombres entiers est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite réelle ne tendant pas vers 0. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de la suite (u_n) tels que, pour tout n, on ait $|u_{\varphi(n)}| > \epsilon$.

Exercice 3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que la sous-suite $(x_{2n})_{n\geq 0}$ converge vers a, que la sous-suite $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers b et que la sous-suite $(x_{3n})_{n\geq 0}$ converge vers c.
1) Montrer que $a = b = c$.
2) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim(u_n - u_{n+1}) = 0$.
1) Est-ce que (u_n) est une suite de Cauchy ?
2) Même question si on suppose de plus que $\lim(u_n - u_{2n}) = 0$.
3) Même question si on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{u_{n+1} - u_{n+2}}{u_n - u_{n+1}} = -\dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 5. Soit (u_n) une suite réelle de Cauchy ne tendant pas vers 0. Montrer directement que la suite $v_n = 1/u_n$ est aussi une suite de Cauchy.

Valeurs d'adhérence

Exercice 6. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
- la suite (u_n) possède exactement k valeurs d'adhérence, pour $k = 0, 1, 2, 3$.
- la suite (u_n) possède une seule valeur d'adhérence, et est divergente.
- l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $\mathbb{N}$.
- l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $[0, 1]$.

Exercice 7. Soit (u_n) une suite réelle bornée. On définit $a_n = \inf_{k\geq n} u_k$ et $b_n = \sup_{k\geq n} u_k$.
1) Montrer que a_n et b_n convergent. On note $\underline{\lim}(u_n)$ et $\overline{\lim}(u_n)$ leurs limites respectives.
2) Montrer que $\underline{\lim}(u_n)$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\underline{\lim}(u_n) = \overline{\lim}(u_n)$.
3) Déterminer les $\underline{\lim}$ et $\overline{\lim}$ pour

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}.$$

puis

$$u_n = \begin{cases} (1 + \frac{1+(-1)^p}{p})^p \ si\ n = 2p \\ (1 + \frac{1}{p})^p \ si\ n = 2p+1 \end{cases}$$

Exercice 8. Soit (u_n) une suite réelle et $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Les assertions suivantes sont-elles toujours vraies ?

1) u_n appartient à A à partir d'un certain rang.

2) Si A est non vide, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3) Tout intervalle $[a,b]$ ne rencontrant pas A ne contient qu'un nombre fini des u_n.

4) Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $u_n \geq \sup A + \epsilon$.

5) Si A est borné, alors (u_n) est bornée.

6)Si $A = \emptyset$ et $u_n \geq 0$ pour tout n, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

7) Si $v_n = u_{\phi(n)}$ est une suite extraite de u_n, et B l'ensemble de ses valeurs d'adhérence, alors

- $\underline{\lim}\, v_n = \underline{\lim}\, u_n$;
- B est inclus dans A.

8) Si A ne possède qu'un seul élément et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est aussi A.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et B l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Montrer que $\sup B$ et $\inf B$ sont des valeurs d'adhérence de (u_n).

Exercice 10. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un intervalle.

Continuité

Exercice 11. Soit $I = [0,1]$. Soit f une application continue de I dans lui-même. Montrer que f admet (au moins) un point fixe (i.e. un point x tel que $f(x) = x$).

Exercice 12. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, monotone.
1) En utilisant la propriété de la borne supérieure, démontrer que f admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ une limite à gauche et une limite à droite.

2) En déduire que si $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, alors f est continue.

3) Montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où f est discontinue est au plus dénombrable.

Exercice 13. Un randonneur gravit une montagne. Sachant qu'il a monté les 1200m de dénivelé en 3h, montrer qu'il a durant son parcours monté 400m de dénivelé en 1h exactement.

Exercice 14. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [0,1]$. Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi(x) = \sup\,(f(t), t \in [0,x])$. Montrer que l'on définit ainsi une fonction φ sur I. Montrer que f est croissante et continue.