L3B – Topologie **Examen du lundi 16 juin 2014** **13h30-17h30**

Documents, calculatrices, téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

0. Questions de cours et applications [6 points].
Soit $(E, \|\bullet\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée.

1) Rappeler la définition de la notion de valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E. En donner une autre caractérisation et démontrer l'équivalence de celle-ci avec la définition.

2) Soient A et B deux parties compactes non vides disjointes de E. Montrer en le justifiant précisément qu'il existe des points $x_0 \in A$ et $y_0 \in B$ tels que $d(x,y)$ réalise la distance $d(A,B)$, à savoir l'inf des distances possibles $d(x,y)$ entre des points $x \in A$ et $y \in B$. Que peut-on en conclure quant à $d(A,B)$?

3) Si A et B sont des parties fermées disjointes, la propriété 2) est-elle nécessairement réalisée ?

4) On suppose ici que E est de dimension finie. Rappeler ce que sont les parties compactes de E. Soit maintenant A, B des parties fermées non vides disjointes de E. Si A est compacte, montrer que la distance $d(A,B)$ est encore réalisée par un couple de points $(x_0,y_0) \in A \times B$.
Indication. Choisir deux points $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ et vérifier que l'inf des distances $d(A,B)$ est certainement réalisé par un couple $(x,y) \in A\times B'$, où B' est l'ensemble des $y \in B$ tels que $d(x_1,y) \le d(x_1,y_1)+\operatorname{diam} A$, où $\operatorname{diam} A = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$.

5) Énoncer un théorème donnant des conditions suffisantes usuelles pour que la somme d'une série $\sum u_n(x)$ de fonctions continues u_n d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit continue, en termes de propriétés de la série de fonctions u_n.

Exercice 1 [6 points + bonus]. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$, muni de la forme bilinéaire

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

1) Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire et que $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ est une norme.
2) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

est une forme linéaire continue, et déterminer la norme $|||\varphi|||$.
3) On suppose désormais $[a,b] = [0,1]$ et on considère la suite $f_n(x) = e^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|_2$ et en déduire qu'il s'agit d'une suite convergente. Sa limite dans E coïncide-t-elle avec la limite ponctuelle $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$?

4) On considère la fonction $g : [0,1[\ \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = (1-x)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ (qui n'est pas dans E). Rappeler quel est le développement en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ donné par la formule de Taylor. Dans la suite de la question, on admettra que l'on a un équivalent

$$(*) \qquad a_n \sim c_\alpha n^{\alpha-1} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

avec une constante $c_\alpha > 0$. Si g_n est le polynôme de degré n donné par la somme partielle $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ de la série, montrer que g_n converge uniformément vers g sur tout intervalle $[0,1-\delta]$, $\delta \in\ ]0,1[$.

5) Calculer à l'aide de $(*)$ un équivalent de $\|g_n - g_{n-1}\|_2$ lorsque $n \to +\infty$, et en déduire que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\alpha < 1/2$. On suppose maintenant que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers un élément $h \in E$. Montrer que l'on devrait alors avoir $h = g$ sur l'intervalle $[0, 1[$. L'espace E est-il complet ?

6) (Question bonus, 2 points) On pose $u_n = \log(a_n/n^{\alpha-1})$ pour $n \geq 1$. Déterminer un développement limité de $u_n - u_{n-1}$ à l'ordre 2 en fonction des puissances de $1/n$ et en déduire $(*)$.

Exercice 2 [4 points]. On considère les espaces suivants :
$E_1 = \mathbb{R}$ (avec la distance usuelle $d_1(x, y) = |x - y|$, $E_2 =]0, 1[$ et $E_3 = [0, 1[$ (avec la distance induite par d_1), $E_4 = \mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne.

1) Déterminer parmi les espaces précédents quelles paires E_i, E_j, forment des espaces homéomorphes, en précisant un homéomorphisme explicite dans chaque cas.

2) Pour les paires non homéomorphes, donner un raisonnement précis justifiant la non existence d'un homéomorphisme.

Exercice 3 [3 points]. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère l'origine $o = (0, 0)$, le point $\omega = (3, 0)$, et la partie
$$A = B(o, 1) \cup \overline{B}(\omega, 2)$$
où $B(p, r)$ désigne la boule ouverte de centre p et de rayon r (ici, un disque !).

1) Représenter A graphiquement. Déterminer l'adhérence $\overline{A}$ et l'intérieur A° : on donnera une justification complète.

2) Les parties A, $\overline{A}$ et A° sont-elles connexes ? Sont-elles compactes ?

Exercice 4 [3 points].
Soit $(p_i)_{1\leq i\leq N}$ une famille finie de points de $\mathbb{R}^n$ et $b = \sum_{1\leq i\leq N} \lambda_i p_i$ leur barycentre pour des poids $\lambda_i \geq 0$ tels que $\sum_{1\leq i\leq N} \lambda_i = 1$. On désigne par $K \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces barycentres.

1) Montrer que K est une partie convexe bornée de $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que l'ensemble $\Delta \subset \mathbb{R}_+^N$ des coefficients $\lambda = (\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^N$ tels que $\sum \lambda_i = 1$ est compact. En déduire que K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.