L3B – Topologie **Examen du lundi 6 janvier 2014** **13h00-17h00**

Documents, calculatrices, téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Questions de cours [6 points].

A) Soit (E, d) un espace métrique.

1) Rappeler la définition d'un espace connexe ; on donnera au moins deux formulations équivalentes.

2) On dit que deux points $x, y \in E$ sont liés par une ε-chaîne dans E s'il existe une suite finie de points $x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y$ de E tel que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour $0 \leq i < N$, et on écrit dans ce cas $x\mathcal{R}_\varepsilon y$. Montrer que $\mathcal{R}_\varepsilon$ est une relation d'équivalence et que les classes d'équivalence sont des ouverts.

3) Montrer que si E est connexe, alors E est bien enchaîné, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, deux points quelconques peuvent être reliés par une ε-chaîne. Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse.

4) Montrer qu'un espace métrique compact E est connexe si et seulement s'il est bien enchaîné.

5) (exercice) Soient E, F des espaces métriques et $u : E \to F$ une application uniformément continue. Si A est une partie bien enchaînée de E, montrer que $u(A)$ est bien enchaînée.

B) Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé. Énoncer et démontrer le théorème du point fixe.

Exercice 1 [7 points]. On considère l'espace $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des applications continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ muni de la norme $\|s\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |s_k|$.

1) Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme sur ℓ^∞ et que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

sont des normes sur $\mathcal{C}$.

2) Soit $a \in \,]0,1[$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère la fonction $f_{a,\varepsilon} \in \mathcal{C}$ telle que $f_{a,\varepsilon}(x) = \max(1 - |x-a|/\varepsilon, 0)$. Représenter le graphe de $f_{a,\varepsilon}$ et calculer les normes $\|f_{a,\varepsilon}\|_1$ et $\|f_{a,\varepsilon}\|_\infty$ lorsque $\varepsilon < \varepsilon_0(a)$ suffisamment petit (on précisera). Les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

3) Sur l'intervalle $[0,1]$, on considère la suite de fonctions continues $f_n(x) = \min(n, 1/\sqrt{x})$ (prolongées par $f_n(0) = n$ en $x = 0$). Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_1)$. L'espace normé $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_1)$ est-il complet ? L'espace normé $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_\infty)$ est-il complet ?

4) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[0,1]$. Montrer que l'application $u : \mathcal{C} \to \ell^\infty$ qui à $f \in \mathcal{C}$ associe la suite $s = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une application linéaire continue de $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_\infty)$ vers $(\ell^\infty, \|\,.\,\|)$, et déterminer la norme de $u : f \mapsto u(f) = s$. L'application linéaire u est-elle continue de $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_1)$ vers $(\ell^\infty, \|\,.\,\|)$?

5) On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$. Montrer que l'application linéaire u est alors une isométrie de $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_\infty)$ dans $(\ell^\infty, \|\,.\,\|)$, c'est-à-dire que $\|u(f)\| = \|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathcal{C}$. En déduire dans ce cas que u est injective et que $u(\mathcal{C})$ est un sous-espace fermé de $(\ell^\infty, \|\,.\,\|)$. Peut-on avoir $u(\mathcal{C}) = \ell^\infty$?

6) On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dense dans $[0,1]$, et on choisit un intervalle ouvert non vide $]c, d[$ qui ne contient aucun point x_n. Montrer que u n'est pas injective dans ce cas.

Exercice 2 [3 points]. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne. On définit :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x| < y \leq 2 - x^2\}.$$

Dessiner A. Déterminer l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ et l'adhérence $\overline{A}$. L'ensemble A est-il ouvert, fermé, compact, connexe par arcs ? Justifier vos réponses.

Exercice 3 [8 points]. **Les parties A et B sont indépendantes**

A) Une suite $u_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$ d'applications continues, $n \geq 1$ étant donnée, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\, 2^{-n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Étudier la convergence de la série donnant f, et montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer également que $f(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$.

A partir d'ici, on choisit pour fonction $u_1 : \mathbb{R} \to [0, 1]$ la fonction périodique de période 1 telle que

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/4 \\ 4x - 1 & \text{si} \quad 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ 4(1 - x) & \text{si} \quad 3/4 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u_n(x) = u_1(10^{n-1}x).$$

2) Représenter graphiquement la fonction u_1 sur l'intervalle $[0, 3]$.

3) Montrer que u_n est lipschitzienne pour une certaine constante de Lipschitz que l'on précisera.

4) Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in \{0, 1\}$ une suite de chiffres binaires et $\alpha = \sum_{p=1}^{+\infty} 5a_p 10^{-p}$. Calculer la partie fractionnaire β de $10^{n-1}\alpha$ et en déduire que l'on a $\beta \in [0, 1/10]$ si $a_n = 0$ et $\beta \in [5/10, 6/10]$ si $a_n = 1$. Calculer $u_n(\alpha)$ et en déduire que la restriction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est surjective.

5) On définit $\gamma : [0, 1] \to [0, 1]^2$ par $\gamma(x) = (g_1(x), g_2(x))$ avec

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}(x)\, 2^{-n}, \quad g_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n}(x)\, 2^{-n}.$$

Montrer que γ est une courbe continue qui réalise une surjection de l'intervalle $[0, 1]$ sur le carré $[0, 1]^2$ (une telle courbe s'appelle une courbe de Peano).

B)

1) On se propose ici d'étudier s'il peut exister une application continue *bijective* $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]^2$. Montrer qu'une telle application serait un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^2$. Pour $c \in]0, 1[$ fixé, étudier la connexité de $[0, 1] \setminus \{c\}$ et de son image $\varphi([0, 1] \setminus \{c\}) = [0, 1]^2 \setminus \{\varphi(c)\}$. Conclure.

2) On se place maintenant dans l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées $s = (s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ muni de la norme $\|s\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |s_k|$, et dans cet espace on considère "l'hypercube" $C = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ des suites s telles que $0 \leq s_k \leq 1$ pour tout k. L'hypercube C est-il compact ? Peut-il exister une courbe continue surjective $\gamma : [0, 1] \to C$?