L3B – Topologie **Examen du lundi 6 janvier 2014 13h00-17h00**

Questions de cours [6 points]. Soit (E, d) un espace métrique.

A) 1) *On dit que deux points $x, y \in E$ sont liés par une ε-chaîne dans E s'il existe une suite finie de points $x = x_0,\ x_1,\ \ldots\ ,\ x_N = y$ de E tel que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour $0 \le i < N$, et on écrit dans ce cas $x\mathcal{R}_\varepsilon y$. Montrer que $\mathcal{R}_\varepsilon$ est une relation d'équivalence et que les classes d'équivalence sont des ouverts.*
$\mathcal{R}_\varepsilon$ est une relation d'équivalence : facile ! (voir cours). Notons $C_\varepsilon(x)$ la classe d'équivalence de $x \in E$ pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\varepsilon$. Si $y \in C_\varepsilon(x)$, il existe une suite finie $(x_i)_{0 \le i \le N}$ telle que $x_0 = x$, $x_N = y$ et $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$. Pour tout point $z \in B(y, \varepsilon)$, on obtient encore une ε-chaîne en posant $x_{N+1} = z$, donc $z \in C_\varepsilon(x)$. Ceci montre que $B(y, \varepsilon) \subset C_\varepsilon(x)$, par suite $C_\varepsilon(x)$ est un ouvert. Comme les classes d'équivalence forment une partition de E, chaque classe $C_\varepsilon(x)$ est le complémentaire de la réunion des autres classes, de sorte que $C_\varepsilon(x)$ est aussi une partie fermée.

2) *Rappeler la définition d'un espace connexe ; on donnera au moins deux formulations équivalentes.*
Un espace métrique (E, d) est dit connexe s'il ne peut être écrit comme réunion $E = F \cup G$ de deux parties F, G non vides et fermées dans E. De façon équivalente, E est connexe ssi toute partie A non vide de E qui est à la fois ouverte et fermée coïncide avec E tout entier ; ou encore si toute partie A de E distincte de $\emptyset$ et de E est de frontière $\mathrm{Fr}_E(A) \neq \emptyset$; ou encore, si toute application continue $u : E \to \{0, 1\}$ est constante.

3) *Montrer que si E est connexe, alors E est bien enchaîné, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, deux points quelconques peuvent être reliés par une ε-chaîne. Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse.* Si E est connexe, alors $C_\varepsilon(x)$ est une partie ouverte et fermée non vide de E (on a $x \in C_\varepsilon(x)$), donc $C_\varepsilon(x) = E$. Ceci montre que x peut être relié à tout autre point y par une ε-chaîne, de sorte que E est bien enchaîné. Un contre-exemple pour la réciproque est donné par $E = \mathbb{R}^* =]-\infty[\cup]0, +\infty[$ qui est bien enchaîné mais n'est pas connexe. Un autre contre-exemple un peu plus élaboré est donné par $E = \mathbb{Q}$. En effet $\mathbb{Q}$ est bien enchaîné (on réalise une ε-chaîne entre deux points $x, y \in \mathbb{Q}$ quelconques en posant $x_i = x + i(y - x)/N$ avec N entier positif assez grand), mais $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu. Pour voir ce dernier point, on utilise le fait chaque composante connexe est contenue dans l'intersection des parties A à la fois ouvertes et fermées contenant x : or tout rationnel x admet un encadrement $y < x < z$ par des irrationnels $y, z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ arbitrairement proches (i.e. $z - y < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ quelconque donné d'avance), et $]y, z[_\mathbb{Q} :=]y, z[\cap \mathbb{Q} = [y, z] \cap \mathbb{Q}$ est à la fois ouvert et fermé. Donc $C(x) \subset \bigcap [y, z] = \{x\}$.

4) *Montrer qu'un espace métrique compact E est connexe si et seulement s'il est bien enchaîné.* L'implication *E connexe $\Rightarrow$ E bien enchaîné* est déjà connue (question 3), donc il reste à voir que pour E compact, *E bien enchaîné $\Rightarrow$ E connexe*, ou (par contraposition) que (pour E compact) *E non connexe $\Rightarrow$ E n'est pas bien enchaîné*. Mais si $E = F \cup G$ avec F, G parties fermées disjointes non vides, alors $\delta = d(F, G) = \inf_{x \in F, y \in G} d(x, y) > 0$, car l'inf est réalisé comme $\delta = d(x_0, y_0)$, $x_0 \in F$, $y_0 \in G$ du fait de la continuité de $(x, y) \mapsto d(x, y)$ sur $F \times G$. En prenant $\varepsilon \in]0, \delta]$, on voit alors qu'un point $x \in F$ et un point $y \in G$ ne peuvent être liés par une ε-chaîne (x_i), car il y aurait un indice i tel que que $x_i \in F$ et $x_{i+1} \in G$ (on prend, disons, le plus grand i tel que $x_i \in F$), et donc $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \le \delta$, contradiction ; donc E n'est pas bien enchaîné.

5) *Soient E, F des espaces métriques et $u : E \to F$ une application uniformément continue. Si A est une partie bien enchaînée de E, montrer que $u(A)$ est bien enchaînée.* Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme u est uniformémemnt continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous points x, $x' \in E$ on ait $d(x, x') < \delta \Rightarrow d(u(x), u(x')) < \varepsilon$. Soient maintenant y, $y' \in u(A)$ deux points quelconques, et $x, x' \in A$ des points tels que $u(x) = y$, $u(x' = y'$. Comme A est bien enchaîné, il existe une δ-chaîne $(x_i)_{0 \le i \le N}$ de points de A telle que $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$. Si on pose $y_i = u(x_i) \in u(A)$ on a alors

$$d(x_i, x_{i+1}) < \delta \Rightarrow d(y_i, y_{i+1}) = d(u(x_i), u(x_{i+1}) < \varepsilon.$$

Comme $y_0 = u(x_0) = u(x) = y$ et $y_N = u(x_N) = u(x') = y'$, ceci montre que $u(A)$ est bien enchaînée.

Question 6 (non posée dans le texte d'examen) *On prend ici $E = F = \mathbb{R}^2$, $u : E \to F$ telle que $u(x, y) = (x, ye^x)$, et enfin $A = D \cup G$ où D est la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $G = \{(x, e^{-x})\}$ le graphe de la fonction*

$x \mapsto e^{-x}$. *La propriété 5) est-elle vraie si on suppose seulement u continue ? Qu'en est-il pour 5) si on suppose u continue et A compacte ?* Il est évident que D et G sont des parties fermées disjointes de $\mathbb{R}^2$, donc par construction $A = D \cup G$ est non connexe. Cependant D et G sont trivialement connexes par arcs (G en tant qu'image de l'intervalle $I = \mathbb{R}$ par la fonction continue $x \mapsto \gamma(x) = (x, e^{-x})$), donc connexes et bien enchaînées. Comme D et G contiennent les points $(x, 0)$ et (x, e^{-x}) dont la distance e^{-x} est inférieure à $\varepsilon > 0$ donné d'avance pour $x > x_0$ assez grand, on en déduit aisément que la partie $A = D \cup G$ est bien enchaînée. Or, on voit que $u(D) = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $u(G) = \mathbb{R} \times \{1\}$, donc $u(A) = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ qui, à l'évidence, n'est pas une partie bien enchaînée. L'image d'une partie bien enchaînée par une application seulement supposée continue n'est donc pas nécessairement bien enchaînée. L'affirmation est cependant correcte lorsque A est compacte : il y a deux façons de le voir, soit on utilise la question 5) et le fait que u est uniformément continue par le théorème de Heine, soit on utilise la chaîne d'implications connues *A partie compacte bien enchaînée $\Rightarrow$ A connexe $\Rightarrow$ $u(A)$ connexe $\Rightarrow$ $u(A)$ bien enchaînée.*

B) *Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé. Énoncer et démontrer le théorème du point fixe.*
Voir le cours. Il convient de prendre une application contractante $\varphi : A \to A$ où A est une partie *complète* de E (il suffit donc que A soit fermée si E lui-même est complet).

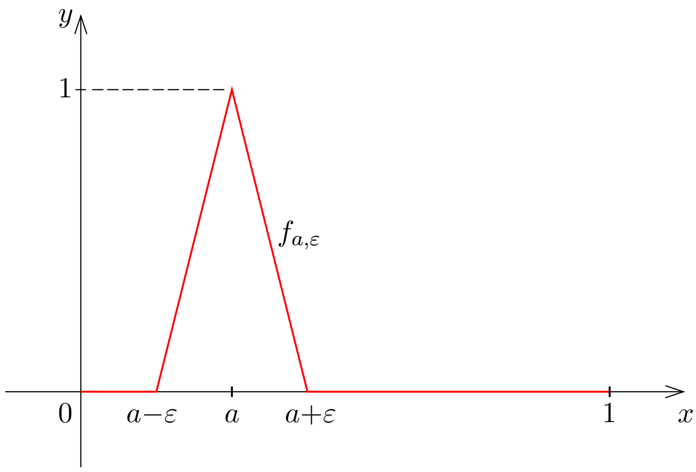
Exercice 1 [7 points]. *On considère l'espace $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des applications continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ et l'espace ℓ^∞ des suites réelles $s = (s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ muni de la norme $\|s\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |s_k|$.*

1) *Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme sur ℓ^∞ et que*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

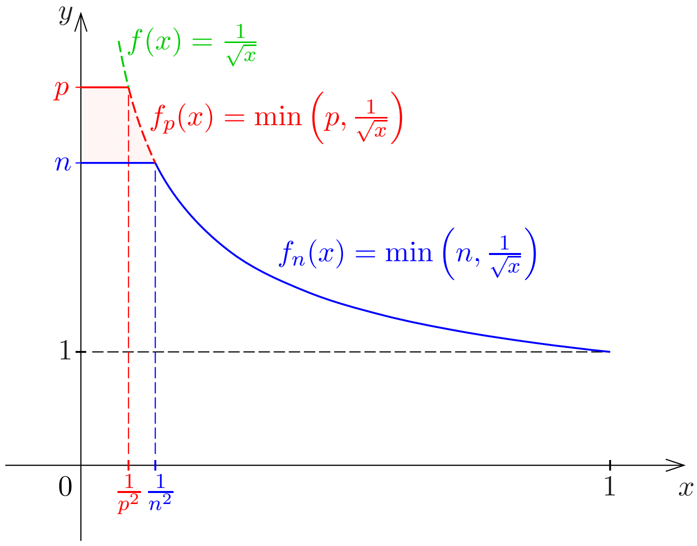
sont des normes sur $\mathcal{C}$.
Le cas de la norme $N(s) = \|s\|$ sur ℓ^∞ est un résultat du cours. On s'assure d'autre part du fait que $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et $N(f + g) \le N(f) + N(g)$ pour $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$, lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}$. Il faut encore montrer que $N(f) = 0$ implique $f = 0$ (ou encore $f \ne 0 \Rightarrow N(f) \ne 0$). C'est immédiat pour $\|\,.\,\|_\infty$. Pour $\|\,.\,\|_1$, cela résulte du fait que l'intégrale de la fonction continue $|f(x)| \ge 0$ supposée non identiquement nulle est > 0.

2) *Soit $a \in\,]0, 1[$. Pour $\varepsilon > 0$ petit, on considère la fonction $f_{a,\varepsilon} \in \mathcal{C}$ telle que $f_a(x) = \max(1 - |x - a|/\varepsilon, 0)$. Représenter le graphe de $f_{a,\varepsilon}$ et calculer les normes $\|f_{a,\varepsilon}\|_1$ et $\|f_{a,\varepsilon}\|_\infty$. Les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?*



On voit aussitôt que $\|f_{a,\varepsilon}\|_\infty = 1$ tandis que $\|f_{a,\varepsilon}\|_1 = \int_0^1 |f_{a,\varepsilon}(x)|\, dx = \varepsilon$ (aire du triangle de base 2ε et de hauteur 1), à condition toutefois que $\varepsilon \le \min(a, 1 - a)$, sinon la base $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ du triangle n'est pas contenue dans $[0, 1]$. On a toujours $\|f\|_1 \le \|f|_\infty$ mais l'inégalité opposée $\|f\|_\infty \le C\|f\|_1$ est contredite par $f = f_{a,\varepsilon}$ en prenant $\varepsilon < 1/C$. Les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes dans l'espace $\mathcal{C}$.

3) *On considère la suite de fonction continues $f_n(x) = \min(n, 1/\sqrt{x})$ (prolongée par $f_n(0) = n$ en $x = 0$). Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}, \|\ \ \|_1)$. L'espace normé $(\mathcal{C}, \|\ \ \|_1)$ est-il complet ? L'espace normé $(\mathcal{C}, \|\ \ \|_\infty)$ est-il complet ?*



Pour $p \geq n$ on voit que $f_p \geq f_n$ et que ces fonctions diffèrent seulement entre 0 et $1/n^2$ (zore colorée en rose). On trouve donc

$$\|f_p - f_n\|_1 = \int_0^{1/p^2} (p-n)dx + \int_{1/p^2}^{1/n^2} \Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - n\Big)dx = \frac{p-n}{p^2} + \Big(2\Big[\sqrt{x}\Big]_{1/p^2}^{1/n^2} - n\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\Big)\Big),$$

soit encore, après un calcul facile,

$$\|f_p - f_n\|_1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n}.$$

Pour $p \geq n \geq n_0(\varepsilon) = E(1/\varepsilon) + 1 > 1/\varepsilon$, cette différence est $< \varepsilon$, et on voit donc que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\|\ .\ \|_1$. Cependant, la suite (f_n) ne peut pas converger dans $\mathcal{C}$. En effet, on a $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1/\sqrt{x}$ pour tout $x \in \,]0,1]$, et on voit intuitivement que cette limite n'est pas dans $\mathcal{C}$; comme la limite simple n'est pas nécessairement une limite pour la norme $\|\ .\ \|_1$, il faut tout de même le voir rigoureusement en utilisant le convergence pour la norme $\|\ .\ \|_1$ plutôt que la convergence simple. Si $u \in \mathcal{C}$ était la limite dans $(\mathcal{C}, \|\ .\ \|_1)$, on obtiendrait pour tout $a \in \,]0,1]$ que la différence

$$\int_a^1 |u(x) - f_n(x)|\, dx \leq \|u - f_n\|_1$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Or, pour n assez grand (à savoir $n \geq 1/\sqrt{a}$) on voit que f_n coïncide avec f sur $[a,1]$, donc à la limite $\int_a^1 |u(x) - f(x)|\, dx = 0$. Comme $u - f$ est continue sur $[a,1]$ on en déduit $u(x) - f(x) = 0$ sur $[a,1]$, et ceci pour tout $a > 0$, donc $u(x) = f(x)$ sur $]0,1] = \bigcup_{a>0} [a,1]$. Mais ceci est impossible puisque f ne peut pas se prolonger par continuité en 0. L'espace $(\mathcal{C}, \|\ .\ \|_1)$ n'est donc pas complet. On a vu cependant en cours que $(\mathcal{C}, |\ .\ \|_\infty$ était complet (critère de Cauchy uniforme). Ceci redémontre d'une autre manière que les normes $\|\ .\ \|_1$ et $\|\ .\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

4) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[0,1]$. Montrer que l'application $u : \mathcal{C} \to \ell^\infty$ qui à $f \in \mathcal{C}$ associe la suite $s = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une application linéaire continue de $(\mathcal{C}, \|\ \ \|_\infty)$ vers $(\ell^\infty, \|\ \ \|)$, et déterminer la norme de $u : f \mapsto u(f) = s$. L'application linéaire u est-elle continue de $(\mathcal{C}, \|\ \ \|_1)$ vers $(\ell^\infty, \|\ \ \|)$?*

Pour $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s_n = f(x_n)$, il est clair que

$$\|u(f)\| = \|s\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 1 \times \|f\|_\infty.$$

D'autre part, il est trivial de vérifier que l'application $u : f \mapsto u(f) = s$ est $\mathbb{R}$-linéaire, donc c'est une application linéaire continue de norme $|||u||| \leq 1$. Mais comme l'égalité $\|u(f)\| = 1 \times \|f\|_\infty$ est atteinte pour la fonction constante $f(x) = 1$, on a en fait $|||u||| = 1$.

5) *On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$. Montrer que l'application linéaire u est alors une isométrie de $(\mathcal{C}, \|\ \ \|_\infty)$ dans $(\ell^\infty, \|\ \ \|)$, c'est-à-dire que $\|u(f)\| = \|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathcal{C}$. En déduire dans ce cas que u est injective et que $u(\mathcal{C})$ est un sous-espace fermé de $(\ell^\infty, \|\ \ \|)$. Peut-on avoir $u(\mathcal{C}) = \ell^\infty$?*

Supposons que la suite (x_n) soit dense dans $[0,1]$. Alors tout point $x \in [0,1]$ est limite d'une certaine sous-suite (x_{n_k}) extraite de (x_n), et on a donc

$$|f(x)| = \left| \lim_{k\to+\infty} |f(x_{n_k})| \right| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| = \|s\| = \|u(f)\|.$$

En prenant le sup pour $x \in [0,1]$, on en déduit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \le \|u(f)\|.$$

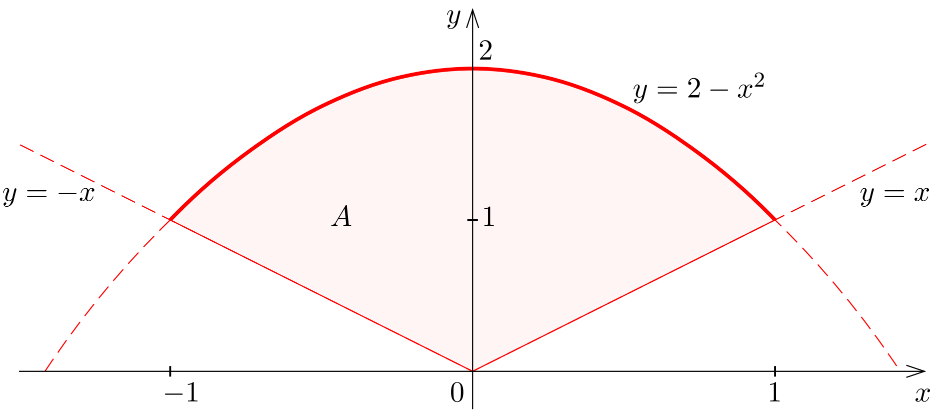
Comme l'inégalité opposée $\|u(f)\| \le \|f\|_\infty$ est déjà connue, on a bien $\|u(f)\| = \|f\|_\infty$, autrement dit u est une isométrie. Si $u(f) = 0$, on voit que $\|f\|_\infty = \|u(f)\| = 0$, donc $f = 0$, par conséquent u est injective. On voit que l'application linéaire $u : \mathcal{C} \to u(\mathcal{C}) \subset \ell^\infty$ réalise une isométrie de $\mathcal{C}$ sur l'espace normé $u(\mathcal{C})$ (bijection préservant les normes). La complétude de $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_\infty)$ entraîne alors celle de $(u(\mathcal{C}), \|\,.\,\|)$, et on en déduit que $u(\mathcal{C})$ est un sous-espace fermé de ℓ^∞.

6) *On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dense dans $[0,1]$, et on choisit un intervalle ouvert non vide $]c,d[$ qui ne contient aucun point x_n. Montrer que u n'est pas injective dans ce cas.*
Prenons $f = f_{a,\varepsilon}$ (telle que définie à la question 2), avec $a = \frac{1}{2}(c+d)$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}(d-c)$, de sorte que $]c,d[\; = \;]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. Alors $u(f_{a,\varepsilon}) = 0$, bien que $f_{a,\varepsilon}$ ne soit pas nulle. Ceci montre que u n'est pas injective.

Exercice 2 [3 points]. *On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne. On définit :*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x| < y \le 2 - x^2\}.$$

Dessiner A. Déterminer l'intérieur $\mathring{A}$ et l'adhérence $\overline{A}$. L'ensemble A est-il ouvert, fermé, compact, connexe par arcs ? Justifier vos réponses.



Nous allons montrer que

$$\mathring{A} = U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x| < y < 2 - x^2\} \quad \text{et} \quad \overline{A} = F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x| \le y \le 2 - x^2\}.$$

En effet U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenu dans A (U est défini par des inégalités strictes mettant en jeu les fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $f : (x,y) \mapsto y - |x|$, $g : (x,y) \mapsto (2-x^2) - y$, il s'agit de l'intersection des images inverses par f, g de l'intervalle ouvert $]0,+\infty[\; \subset \mathbb{R}$, donc c'est un ouvert). Pour la même raison (avec l'intervalle fermé $[0,+\infty[\; \subset \mathbb{R}$), F est une partie fermée. On a donc bien déjà

$$U \subset \mathring{A} \subset A \subset \overline{A} \subset F.$$

Pour justifier l'égalité $F = \overline{A}$, il faut encore montrer que $F \subset \overline{A}$, ce qui équivaut à $F \smallsetminus A \subset \overline{A}$, et pour cela il suffit de voir que les points de

$$F \smallsetminus A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = |x|,\ |x| \le 1\}$$

sont bien adhérents à A. Ceci est clair puisqu'on peut prendre $(x,|x|) = \lim_{n\to+\infty}(x,|x|+1/n) \in A$ si $x \in]-1,1[$, $(1,1) = \lim_{n\to+\infty}(1-1/n,1) \in A$ et enfin $(-1,1) = \lim_{n\to+\infty}(-1+1/n,1) \in A$. Enfin, pour justifier que $\overset{\circ}{A} \subset U$, ce qui équivaut à $A \smallsetminus U \subset A \smallsetminus \overset{\circ}{A} = A \cap \complement \overset{\circ}{A} = A \cap \overline{\complement A}$, il suffit de voir que tout point de $A \smallsetminus U$ est dans l'adhérence de $\complement A$. Mais

$$A \smallsetminus U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = 2 - x^2,\ |x| < 1\}$$

et on a bien $(x, 2-x^2) = \lim_{n\to+\infty}(x, 2-x^2+1/n) \in \complement A$ si $x \in]-1,1[$. Comme $\overset{\circ}{A} \subsetneq A \subsetneq \overline{A}$, on voit que A n'est ni ouverte ni fermée. La partie A n'est donc pas non plus compacte (puisque non fermée).

Enfin il est clair que A est une partie convexe ; en effet, il résulte trivialement de la définition que toute intersection de parties convexes est convexe, et A est l'intersection des demi-plans $P_1 = \{y > x\}$, $P_2 = \{y > -x\}$ (qui sont bien des convexes) et de $G_- = \{y < 2 - x^2\}$ qui est aussi convexe (partie située sous le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) = 2 - x^2$, qui est telle que $f''(x) \leq 0$, donc concave (le graphe est bien sûr une parabole)). En particulier A est connexe par arcs, et donc connexe.

Exercice 3 [8 points]. **Les parties A et B sont indépendantes**

A) *Une suite $u_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ d'applications continues, $n \geq 1$ étant donnée, on pose*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\, 2^{-n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) *Étudier la convergence de la série donnant f, et montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer également que $f(\mathbb{R}) \subset [0,1]$.*

Si $v_n(x) = 2^{-n}u_n(x)$, nous avons par définition $\|v_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} u_n(x)\, 2^{-n} \leq 2^{-n}$, donc il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$ (de façon plus précise $\sum_{n=1}^{+\infty} \|v_n\|_\infty \leq 1 < +\infty$). Ceci implique (théorème du cours sur la convergence normale des fonctions continues) que la somme $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\, 2^{-n}$ est continue, et il est clair que $0 \leq f(x) \leq 1$, donc $f(\mathbb{R}) \subset [0,1]$.

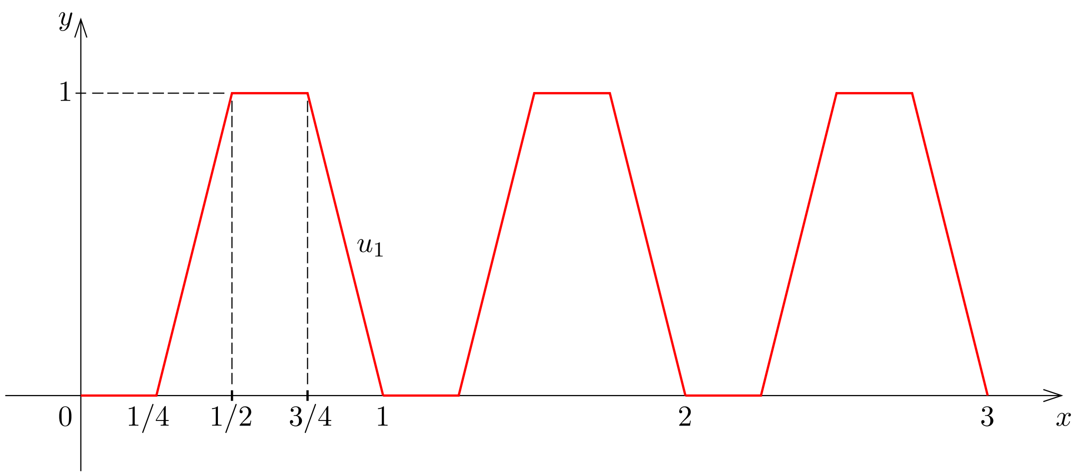
A partir d'ici, on choisit pour fonction $u_1 : \mathbb{R} \to [0,1]$ la fonction périodique de période 1 telle que

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/4 \\ 4x - 1 & \text{si} \quad 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ 4(1-x) & \text{si} \quad 3/4 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u_n(x) = u_1(10^{n-1}x).$$

2) *Représenter graphiquement la fonction u_1 sur l'intervalle $[0,3]$.*



3) *Montrer que u_n est lipschitzienne pour une certaine constante de Lipschitz que l'on précisera.*
La fonction u_1 est affine par morceaux. Sur chacun des intervalles où $u_1(x) = ax + b$ est affine on a $|u_1(x) - u_1(y)| = |a|\,|x - y|$ et les valeurs possibles des pentes sont $a = 0, \pm 4$, donc dans tous les cas $|u_1(x) - u_1(y)| \leq 4|x - y|$. Si $[x, y]$ comporte plusieurs tronçons affines, un découpage montre que l'on a encore $|u_1(x) - u_1(y)| \leq 4|x - y|$. On en déduit

$$|u_n(x) - u_n(y)| = |u_1(10^{n-1}x) - u_1(10^{n-1}y)| \leq 4|10^{n-1}x - 10^{n-1}y| = 4 \cdot 10^{n-1}\,|x - y|,$$

donc u_n est lipschitzienne de constante de Lipschitz $\lambda = 4 \cdot 10^{n-1}$.

4) *Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in \{0, 1\}$ une suite de chiffres binaires et $\alpha = \sum_{p=1}^{+\infty} 5a_p 10^{-p}$. Calculer la partie fractionnaire β de $10^{n-1}\alpha$ et en déduire que l'on a $\beta \in [0, 1/10]$ si $a_n = 0$ et $\beta \in [5/10, 6/10]$ si $a_n = 1$. Calculer $u_n(\alpha)$ et en déduire que la restriction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est surjective.*
Si $\alpha_p = 5a_p$ est le p-ième chiffre de α en écriture décimale, nous avons

$$\alpha = 0{,}\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n \ldots, \qquad 10^{n-1}\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} + 0{,}\alpha_n\alpha_{n+1} \ldots$$

donc la partie fractionnaire $\beta = 10^{n-1}\alpha - E(10^{n-1}\alpha)$ est $\beta = 0{,}\alpha_n\alpha_{n+1} \ldots$. Si $\alpha_n = 5a_n = 0$, on a $\beta \in [0, 1/10]$, et si $\alpha_n = 5a_n = 5$, on a $\beta = 0{,}5 + 0{,}0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2} \ldots \in [5/10, 6/10]$. Maintenant, vu la périodicité de période 1 de u_1, on trouve

$$u_n(\alpha) = u_1(10^{n-1}\alpha) = u_1(E(10^{n-1}\alpha) + \beta) = u_1(\beta) \begin{cases} = 0 & \text{si } a_n = 0 \\ = 1 & \text{si } a_n = 1 \end{cases}$$

Nous avons donc $u_n(\alpha) = a_n$ et $f(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, 2^n$. Comme le terme de droite de cette égalité est un nombre réel quelconque de l'intervalle $[0, 1]$ en écriture binaire, on en conclut que $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est surjective.

5) *On définit $\gamma : [0, 1] \to [0, 1]^2$ par $\gamma(x) = (g_1(x), g_2(x))$ avec*

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}(x)\, 2^{-n}, \quad g_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n}(x)\, 2^{-n}.$$

Montrer que γ est une courbe continue qui réalise une surjection de l'intervalle $[0, 1]$ sur le carré $[0, 1]^2$ (une telle courbe s'appelle une courbe de Peano).
Le résultat de la question 1) (après remplacement de u_n par $\widetilde{u}_n = u_{2n}$ ou $\widetilde{u}_n = u_{2n+1}$) montre que g_1, g_2 sont continues à valeurs dans $[0, 1]$, donc γ est bien une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$. Par ailleurs, le calcul de la question précédente donne

$$g_1(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} 2^{-n}, \qquad g_2(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} 2^{-n}.$$

On voit que les valeurs atteintes par $g_1(\alpha)$ et $g_2(\alpha)$ sont des réels arbitraires de $[0, 1]$, qui peuvent être fixés indépendamment puisque les indices p des chiffres a_p qui y interviennent correspondent à des parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ (les entiers > 0 impairs et les entiers > 0 pairs).
(*Question supplémentaire non posée*) *Montrer de même qu'il existe une courbe continue surjective de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^p$ pour tout entier $p \geq 2$.*
Le même raisonnement montre que $\widetilde{\gamma} : [0, 1] \to [0, 1]^p$ définie par $\widetilde{\gamma}(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_p(x))$ avec

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{p(n-1)+k}(x)\, 2^{-n}, \quad 1 \leq k \leq p$$

est une surjection continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^p$, car les parties $S_k = \{p(n-1) + k\,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $1 \leq k \leq p$, forment une partition de $\mathbb{N}^*$ en p parties : S_k est l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^*$ situés dans la classe de congruence de k modulo p. Mais ceci n'est qu'un exemple, on pourrait aussi prendre une partition quelconque $\mathbb{N}^* = S_1 \cup \ldots \cup S_p$ en p parties infinies (nécessairement dénombrables), indexer S_k comme une suite croissante $\{s_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et prendre $g_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{s_{k,n}}(x)\, 2^{-n}$.

B) 1) *On se propose ici d'étudier s'il peut exister une application continue* **bijective** $\varphi : [0,1] \to [0,1]^2$. *Montrer qu'une telle application serait un homéomorphisme de* $[0,1]$ *sur* $[0,1]^2$. *Pour* $c \in]0,1[$ *fixé, étudier la connexité de* $[0,1] \smallsetminus \{c\}$ *et de son image* $\varphi([0,1] \smallsetminus \{c\}) = [0,1]^2 \smallsetminus \{\varphi(c)\}$. *Conclure.*

L'espace $[0,1]$ est compact. On sait que toute bijection continue d'un espace compact E sur un autre espace métrique (F,d) est un homémorphisme (théorème du cours). Par conséquent, si φ était bijective, ce serait un homéomorphisme (i.e. φ^{-1} serait continue elle aussi). Or si $c \in]0,1[$, l'espace $[0,1] \smallsetminus \{c\} = [0,c[\cup]c,1]$ est non connexe (réunion de deux ouverts disjoints de $[0,1]$), tandis que l'image $\varphi([0,1] \smallsetminus \{c\}) = [0,1]^2 \smallsetminus \{\varphi(c)\}$ est connexe (un carré privé d'un point est connexe par arcs, et même par ligne brisée, de façon triviale). Comme la connexité est préservée par homéomorphisme, c'est une contradiction.

2) *On se place maintenant dans l'espace* ℓ^∞ *des suites réelles bornées* $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *muni de la norme* $\|s\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |s_k|$, *et dans cet espace on considère "l'hypercube"* $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ *des suites* s *telles que* $0 \le s_k \le 1$ *pour tout* k. *L'hypercube* C *est-il compact ? Peut-il exister une courbe continue surjective* $\gamma : [0,1] \to C$ *?*

L'hypercube C est non compact (vu en cours) : en effet si $e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots) \in C \subset \ell^\infty$ (avec le 1 en position n), alors $\|e_p - e_q\|_\infty = 1$ pour tous $p \ne q$, par conséquent (e_n) est une suite sans valeur d'adhérence (aucune sous-suite ne peut converger). Il ne peut donc exister de courbe continue surjective $\gamma : [0,1] \to C$, sinon l'image $C = \gamma([0,1])$ serait compacte comme image continue d'un compact.

Question 3 (non posée dans le texte d'examen) *On se place de nouveau dans l'espace* ℓ^∞ *et on considère "l'hyperparallélépiède"* $P(r)$ *des suites* $s = (s_k)$ *telles que* $0 \le s_k \le r_k$ *où* r_k *est une suite de réels positifs tels que* $\lim_{k\to+\infty} r_k = 0$. *On définit* $\gamma(x) = (r_0 g_0(x), r_1 g_1(x), \ldots, r_k g_k(x), \ldots)$ *avec*

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2^k(2n-1)}(x)\, 2^{-n}.$$

Montrer que $\gamma : [0,1] \to P(r)$ *est une application continue de* $[0,1]$ *sur "l'hyperparallélépipède"* $P(r)$, *puis que* γ *est surjective (pour ce dernier point, on pourra observer que* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \ni (k,n) \mapsto 2^k(2n-1) \in \mathbb{N}^*$ *est une bijection).*

Tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ se décompose de manière unique sous la forme $p = 2^k(2n-1)$, produit d'une puissance de 2 et d'un facteur impair. Ceci montre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \ni (k,n) \mapsto 2^k(2n-1) \in \mathbb{N}^*$ est une bijection. Les parties $S_k = \{p = 2^k(2n-1)\,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $k \in \mathbb{N}$, forment une partition dénombrable de $\mathbb{N}$ en parties elles-mêmes dénombrables. D'après la question A)1), les composantes $x \mapsto r_k g_k(x)$ de γ sont des applications continues de $[0,1]$ sur $r_k \cdot [0,1] = [0, r_k]$. Il reste à voir que γ elle-même est continue. Mais si $\varepsilon > 0$ est donné, choisissons N tel que $k > N \Rightarrow r_k < \varepsilon$. Alors

$$\|\gamma(x) - \gamma(y)\|_\infty \le \max\Big(\max_{0\le k\le N} r_k |g_k(x) - g_k(y)|,\ \varepsilon\Big)$$

puisque les composantes d'indice $k > N$ contribuent pour au plus ε. Comme les g_k sont uniformément continues sur le compact $[0,1]$ (théorème de Heine), il existe $\delta_k > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$ on ait $|x-y| \le \delta_k \Rightarrow r_k|g_k(x) - g_k(y)| < \varepsilon$. Prenons $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_N)$. Alors $|x-y| \le \delta \Rightarrow \|\gamma(x) - \gamma(y)\|_\infty \le \varepsilon$, et on voit que γ est uniformément continue de $[0,1]$ dans $P(r)$. La surjectivité résulte du fait que la famille $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$ en parties dénombrables infinies et que l'on peut atteindre chaque composante $p_k = r_k \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2^k(2n-1)} 2^{-n} \in r_k \cdot [0,1]$ d'un point $p \in P(r)$ en choisissant indépendamment les chiffres binaires a_p pour $p = 2^k(2n-1) \in S_k$, exactement comme à la question 5). Notons qu'il résulte de nouveau de ce résultat que l'hyperparallélépipède $P(r)$ est bien une partie compacte de ℓ^∞, comme on l'avait vu en cours, mais ici on a un résultat bien plus fort, cet hyperparallélépipède de dimension infinie peut être "entièrement parcouru" par une courbe continue sur un intervalle de temps compact, c'est l'observation très surprenante faite par Peano !