Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Questions de cours [6 points]

A) Après avoir rappelé la définition de la continuité uniforme d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, énoncer le théorème de Heine puis le démontrer.

B) Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application.

1) Écrire avec des quantificateurs que l'application f est continue sur E (relativement aux normes indiquées).

2) Écrire avec des quantificateurs que l'application f est continue en 0.

3) On suppose maintenant que l'application f est *linéaire.*

a) Montrer que f est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0.

b) Montrer que f est continue en 0 si et seulement s'il existe $a \geq 0$ tel que $\|f(x)\|' \leq a\|x\|$ pour tout x.

Exercice 1. [3 points]

1) A quelle condition sur le réel a la fonction

$$N_a(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + y^2} \; + \; |y|$$

est-elle une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$?

2) Quand la condition est remplie, décrire la boule unité B_a de la norme N_a.

Exercice 2. [4 points]

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall x, y \in E \quad \big|f(x) - f(y)\big| \leq \big|||x|| - ||y||\big|.$$

1) Montrer que f est continue sur E.

2) On suppose de plus que f est linéaire. Montrer que $f = 0$.

3) Sans supposer que f est linéaire, montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) = g(||x||)$ pour tout $x \in E$. (Indication : si un tel g existe ...)

Exercice 3. [7 points]

Soit F l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$.
On considère E le sous-espace vectoriel de F des fonctions polynomiales sur l'intervalle $[0,1]$:

$$E = \left\{ P \in F \mid \exists n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \cdots, n \text{ avec } P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ \ \forall x \in [0,1] \right\}$$

On considère sur F la norme $||.||_\infty$ définie par

$$||f||_\infty = \sup\{|f(t)| \,\big|\, t \in [0,1]\}$$

et sur E les deux normes $||.||$ et $||.||_1$ définies par

$$||P|| = ||P||_\infty \quad \text{et} \quad ||P||_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{si} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

1) Vérifier que $||.||_1$ est bien une norme sur E.

2) Sur E, l'une des deux normes $||.||$ et $||.||_1$ est plus fine que l'autre. Laquelle ? (Justifier)

3) En considérant la suite $(P_n)_{n>0}$ de E définie par $P_n(x) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-x)^k$ pour $n > 0$, montrer que les normes $||.||$ et $||.||_1$ ne sont pas équivalentes.

4) Est-ce que l'application $\varphi : P \in E \mapsto P'(0) \in \mathbb{R}$ est continue sur

a) E muni de la norme $||.||$? [on pourra considérer la suite $P_n(x) = (x-1)^n/\sqrt{n}$.

b) E muni de la norme $||.||_1$?

5) Soit la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ de E définie par $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
Est-ce que cette suite converge dans l'espace normé $(F, ||.||_\infty)$?

6) En déduire que la suite (S_n) de E ne converge pas dans l'espace normé $(E, ||.||)$ ni dans l'espace normé $(E, ||.||_1)$.

Exercice 4. [4 points] Soit la suite de réels $(S_n)_{n>0}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On note $[x]$ la partie entière d'un réel x et $F(x) = x - [x]$ sa partie fractionnaire.
On définit la suite $(u_n)_{n>0}$ par $u_n = F(S_n)$.
Il s'agit de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $U = [0,1]$.

1) Rappelez brièvement pourquoi $S_n \to +\infty$.

2) Soit n un entier > 0 et a un réel fixé vérifiant $a \geq S_n$.
En considérant l'ensemble $A_n = \{k \geq n | a \geq S_k\}$, montrer qu'il existe $m \geq n$ avec $S_m \leq a < S_{m+1}$.

3) Soit $\alpha \in [0,1]$ et n un entier > 0, en appliquant 2) à $a = \alpha + n$, montrer qu'il existe $m \geq n$ avec $|u_m - \alpha| < 1/n$. Conclure.

4) Que peut-on dire de l'ensemble des valeurs d'adhérence V de la suite

$$v_n = \sin 2\pi\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) ?$$

— ◇ —