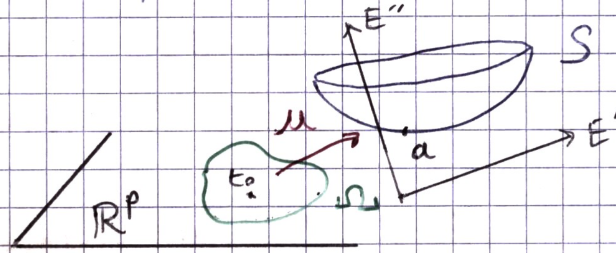
• Remarques sur les paramétrisations locales :

On se donne $S \subset \mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension p et de classe C^k, $n, k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$.

Soient $a \in S$ et u une paramétrisation

$$u : \Omega \longrightarrow S \cap V$$
$$t \longmapsto u(t)$$
$$t_0 \longmapsto a$$



t.q $du(t_0)$ injective

Proposition 3.4.4 :

$du(t_0) : \mathbb{R}^p \longrightarrow T_{S,a}$ est un isomorphisme.

- Démonstration :

- $du(t_0) \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^p ; E)$ injective ;
- $\mathrm{Im}(du(t_0)) \subset T_{S,a}$, puisque

$\gamma(\tau) = u(t_0 + \tau h) \in S \cap V \quad \tau \in]-\delta, \delta[, \ \delta \ll 1$

$\dot{\gamma}(0) = du(t_0)(h) \in T_{S,a}$, $\forall h \in \mathbb{R}^p$.

Par suite, $\dim(T_{S,a}) = p = \dim(\mathrm{Im}(du(t_0)))$, ce qui donne le résultat, par injectivité de $du(t_0)$. $\square$

Proposition 3.4.5 :

Localement, on peut écrire $E = E' \times E''$ et $S \cap V$ est un graphe $x'' = g(x')$.

Alors $T_{S,a} = \{ (h', h''),\ h'' = dg(a')(h') \}$

$$\xrightarrow[\pi_{E'}]{} E'$$

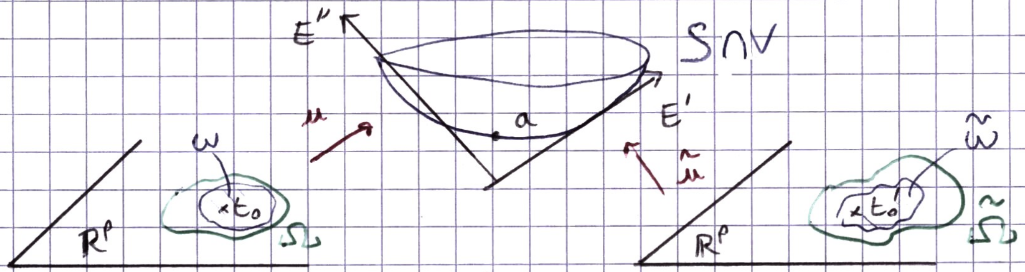
la projection sur E' définie par $(h', h'') \mapsto h'$ est un isomorphisme.

Proposition 3.4.6 :

$\pi_{E'} \circ u : \Omega \longrightarrow V'$ voisinage de a' dans E',

$d(\pi_{E'} \circ u)(t_0) = \pi_{E'} \circ du(t_0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$ sur E'.

Autrement dit, $\pi_{E'} \circ u$ est un C^k-difféomorphisme d'un voisinage de $t_0 \in \Omega$ sur un voisinage de $a' = \pi_{E'}(a) \in E'$.



Proposition 3.4.7 :

Supposons qu'on ait deux paramétrisations locales

$$\begin{cases} u : \Omega \longrightarrow S \cap V, \ t_0 \longmapsto a \\ \hat{u} : \hat{\Omega} \longrightarrow S \cap V, \ \hat{t}_0 \longmapsto a \end{cases}$$

Alors il existe $\varphi : \Omega \supset \omega \longrightarrow \tilde{\omega} \subset \hat{\Omega}$ un C^k difféomorphisme d'un voisinage ω de t_0 sur un voisinage $\hat{\omega}$ de $\hat{t}_0$ tel que

$$u = \hat{u} \circ \varphi \quad \text{sur } \omega.$$

i.e on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} t & \overset{u}{\longmapsto} & x = u(t) \\ \varphi \downarrow & & \\ \hat{t} & \overset{\hat{u}}{\longmapsto} & x = \hat{u}(\hat{t}) . \end{array}$$

- Démonstration :

Par la proposition 3.4.6, $\pi_{E'} \circ u$ (resp. $\pi_{E'} \circ \hat{u}$) est un C^k-difféomorphisme d'un voisinage de t_0 (resp. de $\hat{t}_0$) sur un voisinage de a' : $\varphi = \hat{u}^{-1} \circ u = \underbrace{(\pi_{E'} \circ \hat{u})^{-1}}_{C^k\text{-difféo}} \circ \underbrace{(\pi_{E'} \circ u)}_{C^k\text{-difféo}}$

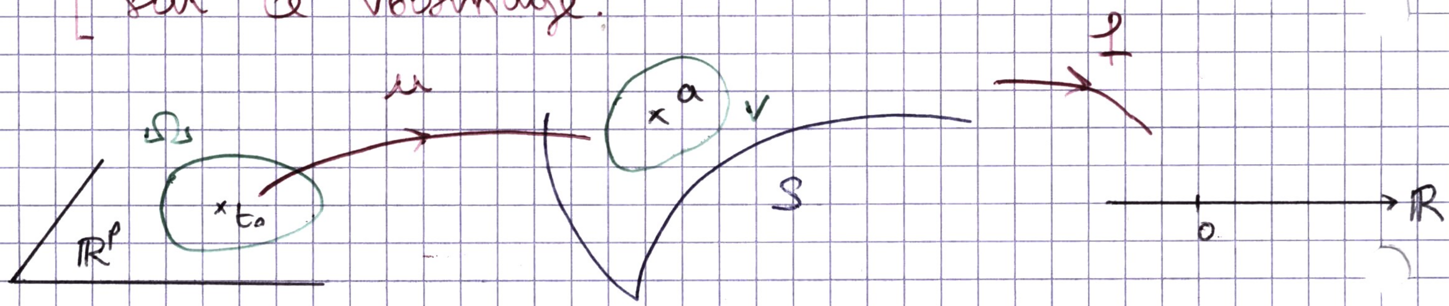
V. Points critiques et extrema sur les sous-variétés :

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E un espace de Banach, $S \subset \mathcal{E}$ une sous-variété et $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Définition 3.5.1 :

On dit que f atteint un <u>maximum local</u> en $a \in S$ s'il existe un voisinage $S \cap V$ de a t.q $f(a) = \sup_{S \cap V} f$.

Ce maximum est dit <u>strict</u> si $f(a) > f(x)$ sur ce voisinage.



$u : \Omega \longrightarrow S \cap V$ homéomorphisme local.

↳ La question se ramène à savoir si $f \circ u(t)$ présente un extremum en t_0.

Définition 3.5.2 :

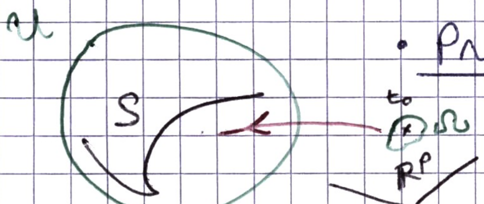
$f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de <u>classe C^k</u> au voisinage de a s'il existe un paramétrage C^ℓ, $\ell \geq k$, au voisinage de a t.q $f \circ u$ soit C^k (indépendant du paramétrage choisi, cf. proposition 3.4.7.).

Proposition 3.5.3 :

- Si $f : S \to \mathbb{R}$ est C^1 et admet un extremum local en a, alors $d(f \circ u)(t_0) = 0$ pour tout paramétrage $u : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to S \cap V$, $t_0 \mapsto a$;
- Si S est de classe C^2 au moins, si f est de classe C^2 sur S et
$$\begin{cases} d(f \circ u)(t_0) = 0 \\ q = d^2(f \circ u)(t_0) > 0 \quad (\text{resp. } q < 0) \end{cases}$$
alors $a = u(t_0)$ est un minimum (resp. maximum) local ;
- Si $q = d^2(f \circ u)$ admet des valeurs propres positives et négatives, alors $a = u(t_0)$ est un point col (ou point selle).

↳ La définition des sous-variétés différentiables utilise le thm des fonctions implicites, qui n'est pas constructif : comment paramétrer la sous-variété sans connaître l'application "graphe" ?

→ On se place dans la situation où S est une sous-variété d'un ouvert $U \subset \mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geq 1$.



- **Problème** : étudier les extrema de $f|_S$.

$a \in S$, $S \cap V$ définie par des équations locales $(g_i(x) = 0)_{1 \leq i \leq q = n-p}$ et $(dg_i(x))_{1 \leq i \leq q}$ indépendantes, $\forall x \in V$ ← vois de a

a point critique de $f|_S$

$\Longleftrightarrow$

$d(f \circ u)(t_0) = 0$

$\Longleftrightarrow$

$df(a) \circ \underbrace{du(t_0)}_{\text{isomorphisme de } \mathbb{R}^p \text{ sur } T_{S,a}} = 0$ (f définie dans l'espace ambiant !

$\Longleftrightarrow \quad df(a)\big|_{T_{S,a}} = 0.$

Lemme 3.5.4 :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\ell_1, \dots, \ell_q \in E^*$ indépendantes et $v \in E^*$.

$$v\Big|_{\bigcap_{j=1}^{q} \ker(\ell_j)} = 0 \Longleftrightarrow (\ell_1, \dots, \ell_q, v) \text{ liée.}$$

- Démonstration :

$\Leftarrow$: $\lambda_1 \ell_1 + \dots + \lambda_q \ell_q + \mu v = 0$, λ_j, μ non tous nuls.

Alors $\mu \neq 0$ car les ℓ_j sont indépendantes.

Donc $\mu = -\sum_{j=1}^{q} \frac{\lambda_j}{\mu} \ell_j$,

donc si $\xi \in \bigcap_{j=1}^{q} \ker \ell_j$, alors $v(\xi) = 0$.

$\Rightarrow$: Soit $n = \dim_{\mathbb{K}} E$, $\mathbb{K}$ corps quelconque.

On a $\dim_{\mathbb{K}} E^* = n$, choisissons $\ell_{q+1}, \dots, \ell_n \in E^*$ de sorte de compléter $(\ell_1, \dots, \ell_q)$ en une base de E^*. Soit $(e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_n)$ la base duale associée.

$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \longrightarrow \ell_j(\xi) = \xi_j \in \mathbb{K}$

$\bigcap_{j=1}^{q} \ker(\ell_j) = \{ \xi \in E ;\ \xi_j = 0,\ 1 \leq j \leq q \} = \langle e_{q+1}, \dots, e_n \rangle.$

Donc $v(\xi) = v_1 \xi_1 + \dots + v_n \xi_n$, $v_j \in \mathbb{K}$

et par hypothèse,

$$v \Big|_{\bigcap_{j=1}^{q} \ker(\ell_j)} = 0$$

d'où $v_{q+1} = \dots = v_n = 0_{\mathbb{K}}$

donc $v = v_1 \ell_1 + \dots + v_q \ell_q$

i.e $(\ell_1, \dots, \ell_q, v)$ liée. $\square$

• Application :

$$df(a)\Big|_{T_{S,a}} = df(a)\Big|_{\bigcap_{j=1}^{q} \ker(dg_j(a))}.$$

Théorème 3.5.5 : [Théorème des Multiplicateurs de Lagrange ou des extrema liés]

Pour que f définie dans un voisinage de $a \in \mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$ admette sur une sous-variété $S \ni a$, localement définie par $(g_i(x) = 0)_{1 \leq i \leq q}$ et $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq q}$ indépendantes,
admette un point critique en a,
il faut et il suffit que :

- $(dg_1(a), \dots, dg_q(a), df(a))$ système lié
- $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$; $df(a) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j dg_j(a)$

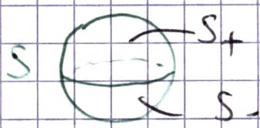
• Exercice :

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$f(x,y,z) = x^2 - y + z.$$

a) Points critiques de $f|_S$, maximum et minimum globaux ?

b) Extrema de f sur $S_+ = \{x^2+y^2+z^2 = 1 ; z \geq 0\}$.



• Solution :

a) Une équation $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1=0$.

$$\begin{cases} dg(x,y,z) = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz \\ df(x,y,z) = 2x\,dx - dy + dz \end{cases} \in (\mathbb{R}^3)^*$$

↳ Sous forme matricielle dans la base (dx, dy, dz) :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2x & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

* On annule les 3 déterminants 2×2 :

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -x - 2xy = -x(1+2y) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & z \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x - 2xz = x(1-2z) = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = y + z = 0$$

et comme on regarde $f|_S$, on a à résoudre :

$$\begin{cases} x(1+2y) = 0 & \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } y = -\frac{1}{2} \\ x(1-2z) = 0 & \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } z = \frac{1}{2} \\ y + z = 0 & \Longleftrightarrow \quad z = -y \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & \end{cases}$$

* On distingue tous les cas possibles :

(i) $x = 0$:

$$\begin{cases} z = -y \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow 2y^2 = 1 \Longleftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

↳ $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sont solutions :

(x,y,z)	$f(x,y,z)$
$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\sqrt{2}$
$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$+\sqrt{2}$

(ii) $x \neq 0$:

$\Longrightarrow y = -\frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$.

On trouve $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$,

et on a :

(x,y,z)	$f(x,y,z)$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$
$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$

* Par compacité de S et continuité de f, les minimum et maximum de f atteint sur S figurent ci-dessus : $-\sqrt{2}$ min. global, $\frac{3}{2}$ max. global.

Nature de $\sqrt{2}$?

↳ paramétrage local par $y = -\sqrt{1-x^2-z^2}$

$\tilde{f}(x,z) = x^2 + \sqrt{1-x^2-z^2} + z$

↳ développement limité.

<u>b)</u> S^+ n'est pas une sous-variété ;

écrire $S^+ = S^{>0} \cup C^{\leftarrow \text{cercle}}$, puis rechercher les extrema de f.
