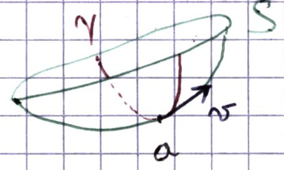
II. Sous-espace tangent :

Définition 3.2.1 :

Soient S une sous-variété C^k de dimension p dans $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$ et $a \in S$.
On appelle sous-espace vectoriel tangent à S en a, et l'on note $T_{S,a}$, l'ensemble

$$T_{S,a} := \{ v \in E ; \; v = \gamma'(0) \quad \forall \gamma \text{ courbes différentiables } \begin{array}{l}]-\delta,\delta[\longrightarrow S \\ t \longmapsto \gamma(t) \\ 0 \longmapsto a \end{array} \}$$

où E est la direction de $\mathcal{E}$.



Définition 3.2.2 :

Le sous-espace affine tangent à la sous-variété S en $a \in S$ est

$$\mathcal{C}_{S,a} = a + T_{S,a}.$$

Proposition 3.2.3 :

$T_{S,a}$ de la définition 3.2.1 est bien un espace vectoriel.

- **Démonstration :**

- 1er cas : S est localement exprimée près de a comme un graphe.

On choisit a comme origine : $\mathcal{E} \simeq E$.

On décompose $\begin{cases} E = E' \oplus E'' & E' \simeq \mathbb{R}^p, E'' \simeq \mathbb{R}^{n-p} \\ x = x' + x'' \end{cases}$

$V = V' \times V''$ dans $E \simeq \mathcal{E}$,

$S \cap V = \{(x', x'') ; x'' = g(x')\}$ avec $g \in C^k(V'; V'')$.

$\hookrightarrow$ $a = (a', a'')$, $g(a') = a''$ (ici $g(0) = 0$).

Une courbe $\gamma :]-\delta, \delta[\longrightarrow S \cap V$

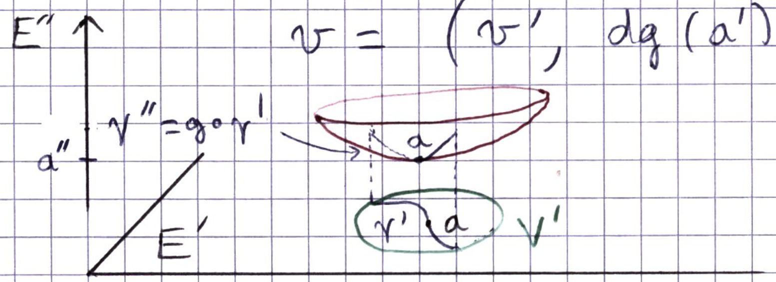
s'écrit $\gamma(t) = (\gamma'(t), \gamma''(t))$

avec $\gamma'' = g \circ \gamma'$.

$\rightarrow$ $\dot{\gamma}(t) = \left(\dot{\gamma}'(t), dg(\gamma'(t))(\dot{\gamma}'(t))\right)$

et à $t = 0$, on a

$$v = (v', dg(a')(v')).$$



$\gamma'(t) = a' + tv'$ $v' \in E'$ quelconque :

v' décrit tout l'espace E'. Donc :

$$T_{S,a} = \{v = (v', dg(a')(v')) ; v' \in E\}$$

est le graphe de $dg(a')$.

En outre, on a la bijection

$$\begin{aligned} E' &\xrightarrow{\simeq} T_{S,a} \\ v' &\longmapsto (v', dg(a')(v')) \end{aligned}$$

d'où $T_{S,a}$ est un s.e.v. de E t.q

$$\dim_{\mathbb{R}}(T_{S,a}) = \dim_{\mathbb{R}}(E') = p.$$

De là on déduit le s.e.a tangent

$$\mathcal{C}_{S,a} = \{(x', x'') ; \underbrace{x'' - a''}_{\in E''} = dg(a')(\underbrace{x' - a'}_{\in E'})\}.$$

• $2^{\text{ème}}$ cas : voisinage $S \cap V$ défini par q équations
$f_1(x) = \dots = f_q(x) = 0$ avec pour tout $1 \leq j \leq q$
$f_j : V \longrightarrow \mathbb{R}$, V voisinage de a.

Soit la courbe lisse $\gamma :]-\delta, \delta[\longrightarrow S \cap V$;
on a $f_j \circ \gamma(t) = 0$
donc $df_j(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) = 0$.
Pour $t = 0$, on obtient

$$df_j(a)(v) = 0 \quad , \quad v = \dot{\gamma}(0).$$

Or, les $df_j(a)$ sont indépendantes : ceci implique que

$$v \in \underbrace{\bigcap_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}(df_j(a))}_{\text{s.e.v. de dimension } p = n-q} \quad \text{s.e.v. de codimension } q.$$

Donc $T_{S,a} \subset \bigcap_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}(df_j(a))$, et le premier cas (avec le thm des fonctions implicites), $T_{S,a}$ est de dimension p. On a :

$$\boxed{T_{S,a} = \bigcap_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}(df_j(a))}$$

Exemple : quadrique affine : $S = f^{-1}\{0\}$

$$\begin{cases} f(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta & (\alpha,\beta,\gamma) \text{ non tous nuls} \\ df(x_0,y_0,z_0) = 2\alpha x_0 dx + 2\beta y_0 dy + 2\gamma z_0 dz \end{cases}$$

$$\underset{a=(x_0,y_0,z_0)}{T_{S,a}} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} ; \alpha x_0 u + \beta y_0 v + \gamma z_0 w = 0 \right\}$$

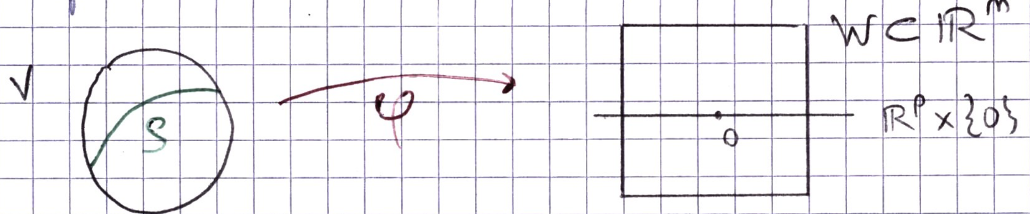
$$\mathcal{C}_{S,a} = \{ (x,y,z) ; \alpha x_0 (x - x_0) + \beta y_0 (y - y_0) + \gamma z_0 (z - z_0) = 0 \}$$

Dans le cas particulier des quadriques, on a de plus
$-(\alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + \gamma z_0^2) = \delta$ pour $a = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

$\Rightarrow \mathscr{C}_{S,a} = \{(x,y,z) \, ; \, \alpha x_0 x + \beta y_0 y + \gamma z_0 z + \delta = 0\}$

↳ plan affine (hors cas dégénérés)

• 3ème cas : $S \cap V$ est donné par un difféomorphisme aplatissant de classe C^k



$x \longmapsto y = \varphi(x)$

↳ Les courbes tracées dans $W \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$ sont de la forme $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), \dots, \tilde{\gamma}_p(t), 0, \dots, 0)$.

On a la bijection :

$$\gamma :]-\delta, \delta[\to S \cap V \longleftrightarrow \tilde{\gamma} :]-\delta, \delta[\to W \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

$$\gamma \longleftrightarrow \tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$$

$$x = \gamma(t) \qquad\qquad y = \varphi(x) = \varphi(\gamma(t))$$

$$T_{S,a} \overset{d\varphi(a)}{\longleftrightarrow} T_{\mathbb{R}^p \times \{0\}} = \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

Si la ss-variété est elle-m̂ un espace vectoriel, alors $T_{S,\cdot} = S$

i.e

$$T_{S,a} = (d\varphi(a))^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = \bigcap_{j=p+1}^{n} \ker(d\varphi_j(a))$$

↳ $\varphi : V \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $S \cap V = \{x \in V \, ; \, \varphi_{p+1}(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0\}$.

→ <u>Cas trivial</u> : $\mathscr{C}_{S,a} = S \Rightarrow T_{S,a} = S - a$ (e.v. associé). □

III. Immersions et submersions :

Définition 3.3.1 :

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des espaces affines associés aux espaces de Banach E, F, $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$ de classe C^k.

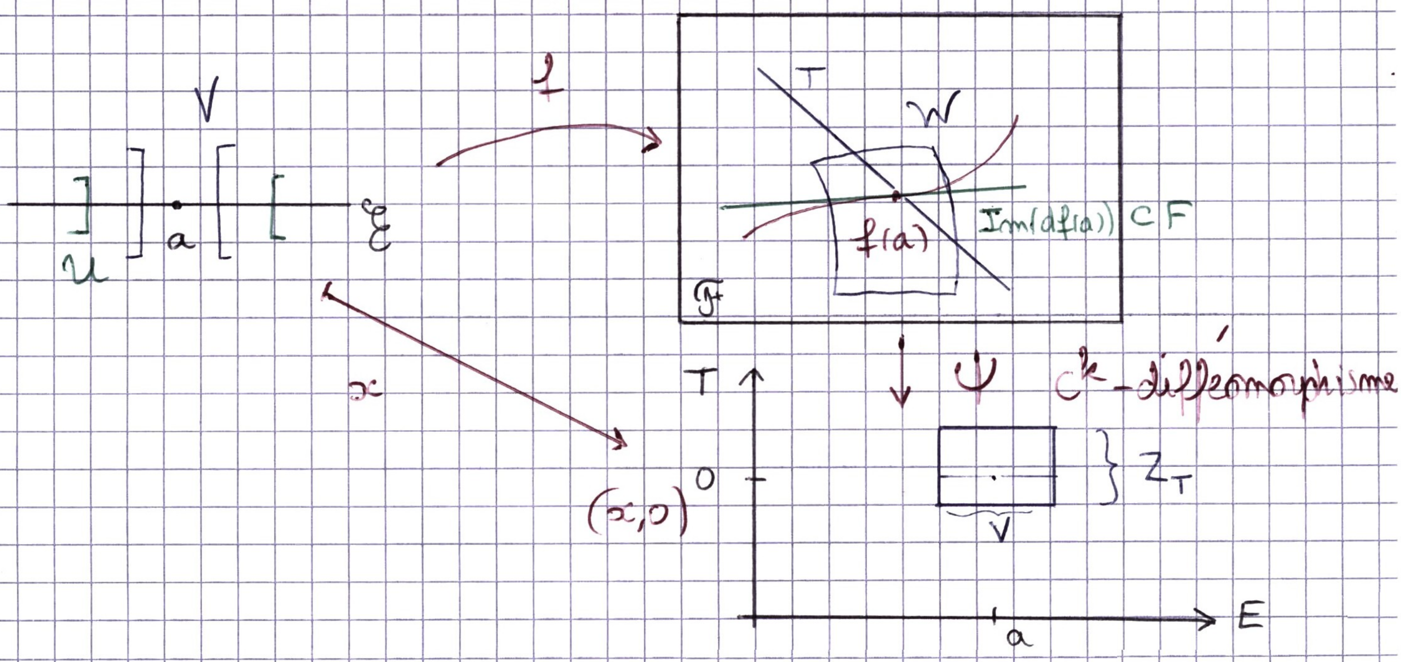
On dit que f est une <u>immersion</u> en $a \in \mathcal{U}$ si $df(a) \in \mathcal{L}_c(E;F)$ est injective — et si la dimension n'est pas finie,

- $\mathrm{Im}(df(a)) \subset F$ est un s.e.v. fermé et admet un s.e.v. supplémentaire T fermé

(conditions automatiques en dimension finie)

On dit que f est une <u>submersion</u> en $a \in \mathcal{U}$ si $df(a) \in \mathcal{L}_c(E,F)$ est surjectif — et si la dimension n'est pas finie, $\mathrm{Ker}(df(a)) \subset E$ admet un supplémentaire fermé S.

1. Théorème des immersions :



Théorème 3.3.2 : [Théorème des immersions]

Si f est une immersion en $a \in \mathcal{U}$ et si T est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(df(a))$ dans F, il existe un voisinage V de a dans $\mathcal{E}$, un voisinage W de $f(a)$ dans $\mathcal{F}$ et un C^k - difféomorphisme $\Psi : W \to V \times Z_T$ (Z_T voisinage de zéro dans T) t.q

$$\Psi \circ f(x) = (x, 0)$$

- Démonstration :

Considérons $\underbrace{\mathcal{U} \times T}_{\subset \mathcal{E} \times T} \xrightarrow{g} \mathcal{F}$, $(x,t) \xmapsto{g} f(x) + t$.

On a :

$$E \times T \xrightarrow{dg(x,t)} F$$
$$(h, \tau) \longmapsto dg(x,t)(h,\tau) = \underbrace{df(x)(h)}_{\in \mathrm{Im}(df(x))} + \underbrace{\tau}_{\in \text{supplémentaire}}$$

qui est clairement une bijection continue d'espaces de Banach.

Par le thm d'isomorphismes de Banach, $(dg(x,t))^{-1}$ existe (isomorphisme), et par conséquent, par le thm d'inversion locale, il existe un voisinage du point $(a,0)$, disons $V \times Z_T$, t.q

$$g : V \times Z_T \longrightarrow W = g(V \times Z_T)$$

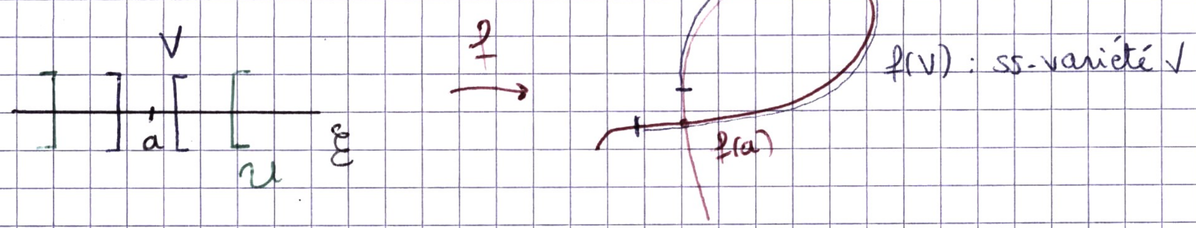
soit un C^k - difféomorphisme.

Clairement, $g(a,0) = f(a)$.

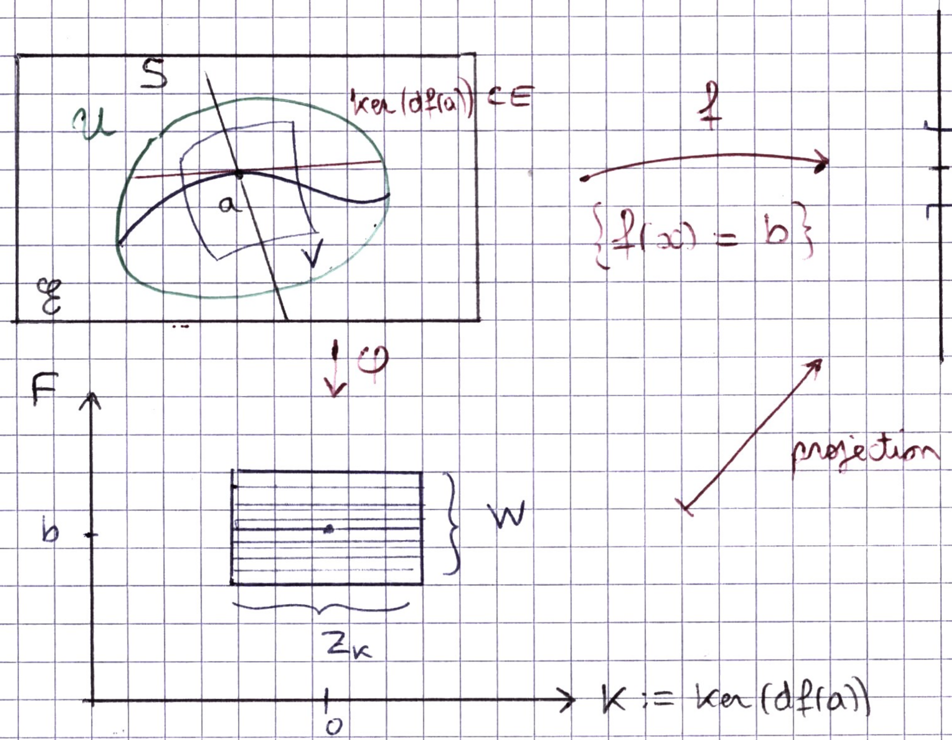
On pose enfin $\Psi = g^{-1} : W \longrightarrow V \times Z_T$; on a $g^{-1}(f(x) + t) = (x, t)$, donc $g^{-1}(f(x)) = (x, 0)$. $\square$

Corollaire 3.3.3 :

Si f est une immersion au point $a \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage V de a arbitrairement petit tq $f(V)$ soit une sous-variété de $\mathcal{F}$



2. Théorème des submersions :



Théorème 3.3.4 : [Théorème des submersions]

Si f est une submersion au point a, alors il existe V un voisinage de a, W un voisinage de $b = f(a)$ et $\varphi : V \to Z_K \times W$ un C^k-difféomorphisme [Z_K voisinage de 0 dans $K = \ker(df(a))$] t.q

$$f = p_F \circ \varphi \qquad p_F : K \times F \longrightarrow F$$

modulo le choix de l'origine en b dans $\mathcal{F}$.

- Démonstration :

L'hypothèse est que $E = K \oplus S$, K, S fermés.

On note $\pi_K : E \to K$ (projection).

On définit alors

$$g : \mathcal{U} \longrightarrow K \times F$$
$$x \longmapsto (\pi_K(x-a), f(x))$$

On a

$$dg(a) : E \longrightarrow K \times F$$
$$h \longmapsto (\pi_K(h), df(a)(h))$$

π_K affine

et $dg(a)$ est bijective :

en effet, si $dg(a)(h) = 0$, alors

$df(a)(h) = 0$ i.e $h \in \operatorname{Ker}(df(a))$

et donc $\pi_K(h) = h = 0 \Rightarrow$ injectivité ;

si maintenant $v \in F$, il existe $h_1 \in E$

t.q $dg(a)(h_1) = v$.

Si $h = h_1 + k$, $k \in K = \operatorname{Ker}(df(a))$, alors

$dg(a)(h) = (\pi_K(h_1) + k, v) \Rightarrow$ surjectivité.

On prend alors $\varphi = g$. $\square$

Corollaire 3.3.5. :

Si f est une submersion au point $a \in \mathcal{U}$ et si $b = f(a)$, alors il existe un voisinage V de a t.q $V \cap f^{-1}(b) = \{x \in V ; f(x) = b\}$ est une sous-variété de classe C^k de V passant par a.

De plus $V \cap f^{-1}(y)$ est aussi une sous-variété de classe C^k de V pour tout $y \in W$, W voisinage assez petit de b.

IV. Sous-variétés paramétrées :

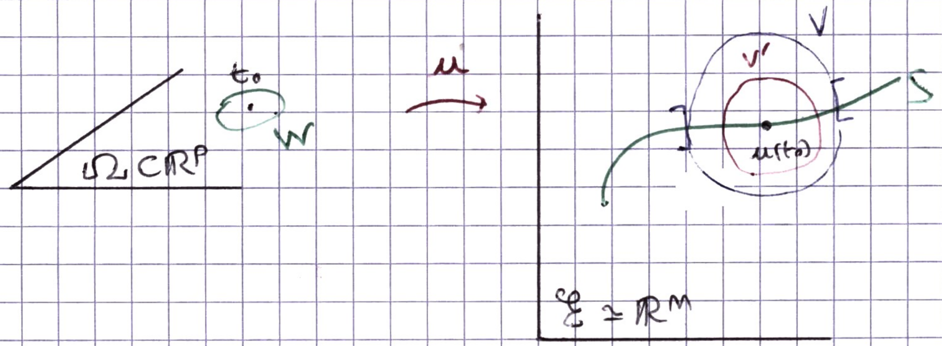
Définition 3.4.1 :

Soit S une sous-variété de dimension p de $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$.

On appelle <u>paramétrage local</u> de S au voisinage de $a \in S$ une application

$$u : \Omega \longrightarrow S \cap V \;,\; t \longmapsto x = u(t)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ est un voisinage de t_0, et $u(t_0) = a$, et $du(t_0)$ est une immersion $\Leftrightarrow$ injection (dimension finie)



On demande la condition additionnelle

$$S \cap V' = u(W) \quad \text{où } W \text{ voisinage de } t_0.$$

***Remarque :**

$$S \cap V = \{ x'' = g(x') \,;\, x' \in V' \subset E' \simeq \mathbb{R}^p \} \quad \text{graphe}$$

$\hookrightarrow$ $u : V' \longrightarrow V$

$x \longmapsto (x', g(x'))$

est un paramétrage local.

***Exemple :**

$S(0,R)$: sphère dans $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ paramétrage en latitude φ et longitude θ : $\left]-\pi,\pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow S = \{x^2+y^2+z^2=R^2\}$

$$(\theta,\varphi) \longmapsto \begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta \\ y = R\cos\varphi\sin\theta \\ z = R\sin\varphi \end{cases}$$

Définition 3.4.2 :

Soit S une sous-variété de classe C^k dans $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n$.
On appelle <u>paramétrage global</u> (de classe C^k) de S une application

$$u : \Omega \longrightarrow S$$

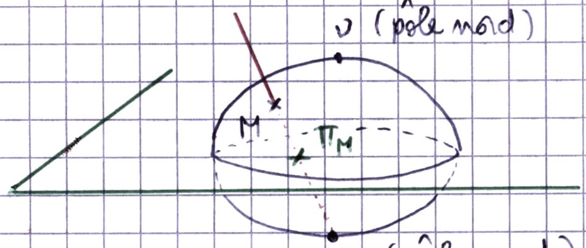
où $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ si

- $\forall a \in \Omega$, $du(a)$ injective,
- $u : \Omega \to S$ bijective.

***Remarques:**

- Pas toujours de paramétrage global

<u>ex</u>: $S(O,R) = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

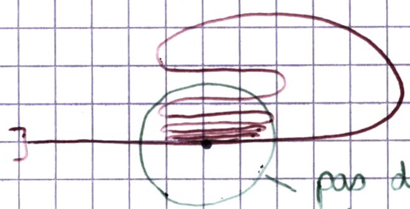


projection stéréographique

- Considérons $u : \Omega \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui soit C^k, $k \geq 1$, injective et t.q $du(x)$ est injective pour tout $x \in \Omega$.

→ <u>Question</u> : $u(\Omega)$ est-elle une sous-variété?
↳ NON!

<u>ex</u>: $\Omega =]0,1[\xrightarrow{u} \mathbb{R}^2$



pas de ss-variété dans ce voisinage!

Théorème 3.4.3 :

Si $\Omega \subset \mathcal{E}$ est ouvert et si $u : \Omega \to \mathcal{F}$ est de classe C^k et vérifie

(i) u injective,

(ii) $\forall x \in \Omega$, $du(x)$ injective,

(iii) $u : \Omega \to u(\Omega)$ est un homéomorphisme pour la topologie induite par $\mathcal{F}$ sur $u(\Omega)$

Alors $S = u(\Omega)$ est une sous-variété de $\mathcal{F}$.

- Démonstration :

Prenons $a = u(t_0) \in u(\Omega) =: S$.

Il existe un voisinage W de a dans $\mathcal{F}$ t.q $u^{-1}(S \cap W) =: V$ soit un voisinage arbitrairement petit de t_0.

Pour V assez petit, par le théorème des immersions, $u(V) = S \cap W$ est une sous-variété. $\square$