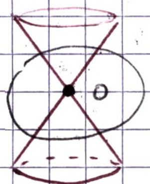
Théorème 3.1.8 : [Lemme de Morse]

Soient $f : \mathcal{U}_{\subset \mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k avec $k \geq 2$,
$x_0 \in \mathcal{U}$ t.q $f(x_0) = 0$ et $df(x_0) \equiv 0$
et $q = \frac{1}{2} d^2 f(x_0)$ est non dégénérée.
Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0,
$\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow W$ un C^{k-1}-difféomorphisme de
$\mathcal{V}$ sur W un voisinage de 0_E ($\mathcal{E}$ de direction E),
t.q
(i) $d\varphi(x_0) = Id_E$
(ii) $f(x) = q \circ \varphi(x)$ sur $\mathcal{V}$

Conséquence géométrique :

φ bijective : $y := \varphi(x) \rightarrow q(y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2$

val. propres ds 1 base

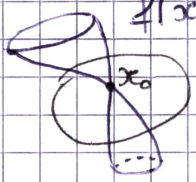


$W \subset E$

$q(y) = 0$

$\hookrightarrow$ cône quadratique ; sous-variété de $E \setminus \{0_E\}$

$y = \varphi(x)$



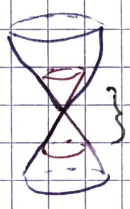
$f(x) = 0$

$\mathcal{E} \supset \mathcal{V}$

$\hookrightarrow$ On a :

$\{x \in \mathcal{V} ; f(x) = 0\}$
$= \varphi^{-1}\{y \in E ; q(y) = 0\}$

$\hookrightarrow$ superposition des 2 cônes :



} mêmes tangentes proche de x_0 et 0

Formule de Leibniz : (notation multi-indices)

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ $\quad D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$$D^\alpha (u(x) v(x)) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta u(x) D^{\alpha - \beta} v(x),$$

$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \beta_i \leq \alpha_i$

$\alpha ! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i !$

(Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ $\longrightarrow$ récurrence sur α_i).

- Démonstration du lemme de Morse :

En choisissant x_0 comme origine dans $\mathcal{E}$, on peut supposer $x_0 = 0$.

On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de l'espace E associé à $\mathcal{E}$ dans laquelle la forme quadratique $q = \frac{1}{2} d^2 f(x_0)$ admet une matrice diagonale (q symétrique réelle $\longrightarrow$ diagonalisable) :

$$q(h) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j^2 \quad , \quad \lambda_j \in \mathbb{R}^* \quad (q \text{ non dégénérée}).$$

Par la formule de Taylor en x_0 (ordre k) :

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha + \underset{\nwarrow \text{ reste}}{r(x)}$$

où

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0), \qquad \text{polynôme de Taylor } (\mathcal{C}^\infty)$$

$$r(x) = o_{(0)}(|x|^k) = f(x) - \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha.$$

r est de classe C^k (comme f) :

$$D^\alpha r(0) = D^\alpha f(0) - \alpha! \, c_\alpha = 0$$

et $\forall \beta \leq \alpha$,

$$|D^\beta r(x)| \underset{x \to 0}{=} o\left(|x|^{k-|\beta|}\right) \quad , \quad \text{car } D^\gamma D^\beta r(0) = 0 \quad |\gamma| \leq k - |\beta|.$$

Par hypothèse, $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ i.e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$.

Ainsi, on a :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{|\alpha| = 2} c_\alpha x^\alpha}_{= q(x)} + \sum_{3 \leq |\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha + r(x)$$

dans la base où Mat(q) diagonale

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 + \underbrace{\sum_{3 \leq |\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha + r(x)}_{\text{à éliminer !}}$$

→ Comment éliminer $c_\alpha x^\alpha$ pour $3 \leq |\alpha| \leq k$?

$$x^\alpha = \underbrace{x_j}_{\text{variable qlcq figurant dans } x^\alpha} x^\beta \qquad |\beta| = |\alpha| - 1 \,, \; |\beta| \geq 2$$

$$\Rightarrow \lambda_j x_j^2 + c_\alpha x^\alpha = \lambda_j x_j^2 + c_\alpha x_j x^\beta$$

$$\text{Gauss} \longrightarrow = \lambda_j \Big(x_j + \frac{c_\alpha}{2\underbrace{\lambda_j}_{\neq 0}} x^\beta\Big)^2 - \frac{c_\alpha^2}{4\lambda_j} x^{2\beta}$$

et $2|\beta| = 2|\alpha| - 2 = |\alpha| + \underbrace{(|\alpha| - 2)}_{\geq 1} > |\alpha|$.

→ On procède à des changements de variables successifs :

$$\varphi_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 = x_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_j = x_j + \frac{c_\alpha}{2\lambda_j} x^\beta \\ \vdots \\ \tilde{x}_n = x_n \end{pmatrix} , \quad |\beta| \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad d\varphi_1(0) = Id_E \qquad (E \simeq \mathbb{R}^n).$$

et

$$\|\tilde{x}\| \underset{x \to 0_E}{\sim} \|x\| \qquad \Big(\text{différence du fait du terme } \underset{= o(\|x\|)}{\propto x^\beta} \xrightarrow[x \to 0]{} 0\Big)$$

donc $$x = \tilde{x} - \frac{c_\alpha}{2\lambda_j} x^\beta \underbrace{\hat{e}_j}_{\text{direction de } x_j} = \tilde{x} + O_{(0)}(\|\tilde{x}\|^{|\beta|})$$

et, par suite,

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_j^2 - c_\alpha x^\alpha + \sum_{3 \leq |\gamma| \leq k} c_\gamma x^\gamma + r(x) + O(\|x\|^{2|\beta|})$$

le terme $c_\alpha x^\alpha$ s'élimine

↳ On itère le procédé afin d'éliminer $\sum_{3 \leq |\gamma| \leq k} c_\gamma x^\gamma$ modulo des termes d'erreurs de l'ordre de grandeur du reste :

on obtient de nouvelles coordonnées (notées encore $\tilde{x}$) :

$$\tilde{x} = \varphi_N \circ \varphi_{N-1} \circ \dots \circ \varphi_1(x) \,, \quad d\varphi_j(0) = Id_E \quad (\varphi_j \in C^\infty)$$

polynômes

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_j^2 + \underset{o\,(\|\tilde{x}\|^k)}{\overset{\nearrow C^k}{\tilde{r}(\tilde{x})}}$$

→ On est ramené au cas

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2}_{q(x) = \frac{1}{2} d^2 f(0)} + r(x)$$

où r est C^k

$$r(x) = o\left(\|x\|^k\right).$$

On a $r(x) = \dfrac{\sum x_j^2}{\|x\|^2}\, r(x)$,

soit :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 \left(1 + \frac{1}{\underset{\neq 0}{\lambda_j}} \frac{r(x)}{\|x\|^2}\right)$$

→ Dernier changement de variable :

$$\tilde{\varphi} : y_j = x_j \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_j} \frac{r(x)}{\|x\|^2}}, \quad j \in [\![1, n]\!].$$

L'application recherchée est donc :

$$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \varphi_N \circ \dots \circ \varphi_1$$

On a bien :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2$$

Montrons à présent que $\tilde{\varphi}$ est C^{k-1} :

on utilise le

Lemme 3.1.9 :

$\dfrac{x_j}{\|x\|^2} r(x)$ est de classe C^{k-1} en $0_{E = \mathbb{R}^n}$,

t.q les dérivées soient nulles jusqu'à l'ordre $k-1$.

– Démonstration :

Par Leibniz,

$$D^{\alpha}\left(x \mapsto \frac{x_j}{\|x\|^2} r(x)\right) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^{\beta}\left(\frac{x_j}{\|x\|^2}\right) D^{\alpha-\beta}\left(r(x)\right)$$

et $\left|D^{\alpha-\beta} r(x)\right| \underset{x\to 0}{=} o_{(1)}\left(\|x\|^{k-(|\alpha|-|\beta|)}\right)$

On pose alors $u(x) = \dfrac{x_j}{\|x\|^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\};\mathbb{R})$.

u est homogène de degré (-1).

D'où

$$D^\beta u(x) \quad \text{homogène de degré } -1-\overbrace{|\beta|}^{\text{nbr de fois que l'on a dérivé}}.$$

Or, si v homogène, continue de degré δ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, alors

$$v(x) = v\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|x\|^\delta$$

et $\dfrac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$ (sphère unité de $\mathbb{R}^n$).

Alors

$$|v(x)| \leq C\|x\|^\delta,$$

et par suite :

$$\left|D^\beta\left(\frac{x_j}{\|x\|^2}\right)\right| \leq \frac{C}{\|x\|^{1+\beta}} \quad \text{par homogénéité}$$

Finalement :

$$\left|D^\alpha\left(\frac{x_j}{\|x\|^2} r(x)\right)\right| \leq \underset{x\to 0}{\underset{\to 0}{\varepsilon(x)}}\sum_\beta \underbrace{\|x\|^{k-(|\alpha|-|\beta|)}}_{\left|D^{\alpha-\beta} r(x)\right|} \cdot \underbrace{\|x\|^{-1-|\beta|}}_{\left|D^\beta\left(\frac{x_j}{\|x\|^2}\right)\right|}$$

$$= \tilde{\varepsilon}(x)\,\|x\|^{k-|\alpha|-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

pourvu que $|\alpha| \leq k-1$.

Conclusion :

$x \longmapsto \dfrac{x_j}{\|x\|^2} r(x)$ se prolonge en une fonction C^{k-1} □

Retour à la démonstration :

$v_j(x) = x_j\sqrt{1+\dfrac{1}{\lambda_j}\dfrac{r(x)}{\|x\|}}$, et $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^2}{8}+\dots$

donc :

$$v_j(x) = x_j + \overbrace{\frac{x_j}{2\lambda_j\|x\|^2} r(x)}^{C^{k-1}} - \frac{1}{8}\frac{x_j r(x)^2}{\lambda_j^2\|x\|^4}$$

Par récurrence sur les dérivées :

$$|\beta'| \leq \beta - 1$$

$$D^{\beta} v_j(x) = x_j \frac{D^{\beta}\left(\frac{1}{\lambda_j \|x\|^2} r(x)\right)}{(1 + \dots)^{*}} + 1 . \frac{D^{\beta'}\left(\frac{1}{\lambda_j \|x\|^2} r(x)\right)}{(1 + \dots)^{*}}$$

et on retrouve le résultat. $\square$

Corollaire 3.1.10 :

Si f est de classe C^k t.q $f(x_0) = 0$, $df(x_0) = 0$ et $q = \frac{1}{2} d^2 f(x_0)$ non-dégénérée, alors l'ensemble $\{f(x) = 0\}$ n'est pas une sous-variété au voisinage de x_0.

cône quadratique
↳ problème au sommet

En revanche, pour V assez petit, $\{f(x) = 0\} \cap V \setminus \{x_0\}$ est une sous-variété de classe C^k de $V \setminus \{x_0\}$. → le difféomorphisme φ du lemme de Morse est en fait C^k sur $V \setminus \{x_0\}$