Université Grenoble I
Licence L361A
Mercredi 22 février 2012

Mathématiques
Année 2011-2012
10H30-11H30

Contrôle continu n°1

Durée : 1 H

Avertissement : La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note finale. Je rappelle qu'en Mathématique toute **affirmation** doit être **justifiée**, soit en faisant appel au cours, soit par équivalence avec un énoncé plus simple, clairement vrai. Et tout cela avec une extrême rigueur !

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y^2}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et les calculer.
2. En quels point de $\mathbb{R}^2$ la fonction f est-elle différentiable ? de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2. On se place dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|A\| := \sqrt{\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA)}$. On admet que, pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

1. Montrer que l'application $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = {}^{\mathrm{t}}A$ (transposée de A) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.
2. Montrer que $g : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $g(A,B) = {}^{\mathrm{t}}ABA$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$.
3. Calculer la différentielle de g.
4. En déduire la dérivée de $t \mapsto g(tA+(1-t)B, tA+(1-t)B)$ en $t = 1/2$ (A, B matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).
5. On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$ de la norme $\|(A,B)\|_\infty = \max\{\|A\|, \|B\|\}$ (on ne demande pas de vérifier que ceci définit une norme). Montrer *de deux manières différentes* que, pour tous $A, B, U, V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de normes ≤ 1, on a

$$\|{}^{\mathrm{t}}ABA - {}^{\mathrm{t}}UVU\| \leq 3\|(A,B) - (U,V)\|_\infty.$$