

Rapport de stage
Dynamique de la monodromie du nœud de huit

Antoine VELUT — ENS de Lyon

Mai - Juin 2022

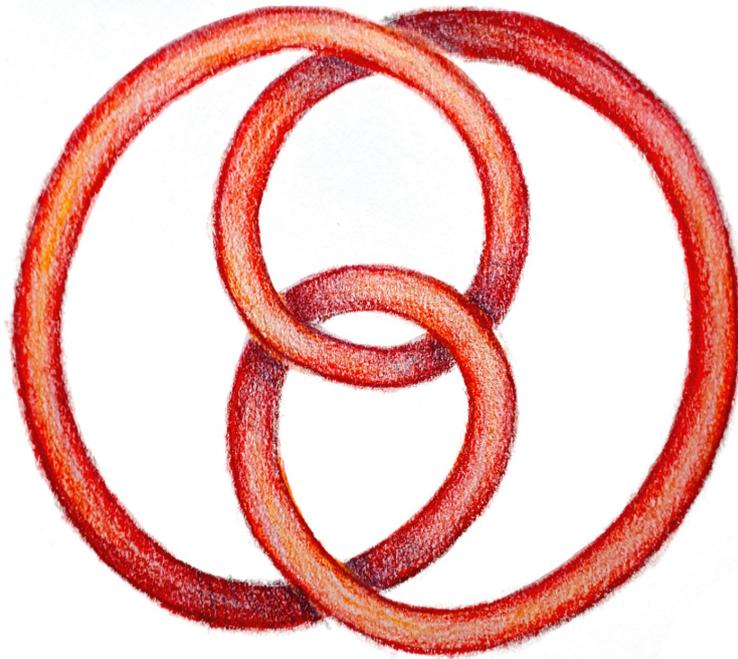


Table des matières

Introduction	3
Notions préliminaires	3
I Théorie des nœuds et topologie algébrique	5
1 Nœuds et livres ouverts	5
1.1 Équivalence de nœuds	5
1.2 Nœuds fibrés	6
1.2.1 Livres ouverts et tores de suspension	6
1.2.2 Décomposition en livre ouvert du complémentaire du nœud trivial	8
1.2.3 La monodromie est définie à isotopie près.	9
2 Surfaces et groupe modulaire	9
2.1 Construction du groupe modulaire	10
2.2 Exemples de groupe modulaire	11
2.2.1 Cas du disque	11
2.2.2 Cas de l’anneau	11
2.2.3 Cas du tore	12
3 Exemples de nœuds fibrés	13
3.1 Entrelacs de Hopf	13
3.2 Nœud de trèfle	15
3.3 Nœud de huit	16
II Systèmes dynamiques et hyperbolicité	18
4 Introduction aux systèmes dynamiques	18
4.1 Suspension et section transverse	18
4.2 Décalages et sous-décalages	19
4.3 Codage en itinéraires et partitions de Markov	20
5 Systèmes dynamiques hyperboliques	21
5.1 Stabilité structurelle	21
5.2 Automorphismes hyperboliques du tore	22
5.2.1 Monodromie du nœud de huit	22
Conclusion	24
Bibliographie	25

Introduction

La théorie des nœuds, qui étudie les plongements du cercle dans l'espace en 3 dimensions, est une porte d'entrée naturelle pour qui se lance dans la topologie de petite dimension. Parmi les différents nœuds, le nœud de huit était un cas d'étude très apprécié de William P. Thurston, pionnier dans l'étude des variétés de dimension 3. Ainsi une place de choix lui est réservée dans son livre *Three-dimensional geometry and topology* [Thu97], basé sur des notes datant de 1980 mais qui fait encore à ce jour figure de référence dans le domaine. Cela en a en fait un exemple typique et bien connu de la communauté mathématique.

C'est donc tout naturellement que Joan S. Birman et Robert F. Williams ont repris comme exemple central le nœud de huit dans leur article de 1983 *Knotted periodic orbits in dynamical systems* [BW83] qui mêle théorie des nœuds et des systèmes dynamiques en étudiant les nœuds formés par les orbites périodiques de flots dans l'espace.

Leur article est à la fois le point de départ de ce stage et sa clé de voûte, au point d'intersection des deux branches a priori disjointes des nœuds et des systèmes dynamiques. Ce rapport se structure autour d'une présentation de ces deux domaines, pour amener vers un pont qui les relie au travers de l'exemple de la monodromie du nœud de huit.

Dans mon étude de la théorie des nœuds, les ouvrages *Knots and Links* [Rol03] de Dale Rolfsen et *Knot theory and its applications* [Mur96] de Kunio Murasugi me servent de support. En particulier, la section 1.2.1 est basée sur l'article *Lectures on open book decompositions and contact structures* [Etn04] de John B Etnyre. De même, *Introduction to dynamical systems* [BS02] est la référence principale pour ma présentation des systèmes dynamiques.

Un certain nombre de dessins présents dans ce rapport sont inspirés de l'impressionnant *A topological picturebook* [Fra87].

Notions préliminaires

Rappelons ici quelques définitions, qui serviront de cadre à notre travail.

Définition. Une *n*-variété à bord est un espace topologique séparé M dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert ou bien de l'espace euclidien \mathbb{R}^n ou bien du demi-espace supérieur $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$.

Les points de M qui correspondent via ces homéomorphismes à des points de \mathbb{R}^{n-1} — où $\mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\}$ — forment le bord de M , noté ∂M , qui est une variété de dimension $n - 1$. Par exemple, la boule unité fermée \mathbb{B}^n est une n -variété dont le bord est \mathbb{S}^{n-1} .

On parlera dans la suite de *surface* pour tout variété connexe de dimension 2 comme le disque, la sphère ou le tore. Dans le cadre de la théorie des nœuds, on s'intéressera particulièrement aux surfaces *orientables*, car ce sont celles dont l'étude s'est révélée la plus fructueuse. La notion d'orientabilité dépassant cependant le cadre de ce rapport, on se contentera de la notion intuitive de surface orientable¹ et de difféomorphisme préservant l'orientation.

Remarque. On devrait ici se poser la question de la régularité des objets considérés, c'est-à-dire si l'on considère des applications C^∞ , C^k pour un $k \geq 1$, ou même encore *PL* (*Piecewise Linear* pour linéaire par morceaux). Il a toutefois été prouvé que la théorie est la même quelle que soit la régularité choisie dans le cas des petites dimensions 2 et 3 étudiées ici².

1. On peut tout de même caractériser les surfaces non orientables comme étant celles contenant un ruban de Möbius.

2. Cela n'est par contre plus du tout le cas en dimension 4!

Définition. Soient X, Y deux espaces topologiques et f, g deux applications continues de X vers Y . On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continue telle que :

$$H(\cdot, 0) = f \quad \text{et} \quad H(\cdot, 1) = g$$

On les qualifie d'*isotopes* si de plus pour tout t dans $[0, 1]$, l'application $h_t : x \mapsto H(t, x)$ est un homéomorphisme de X vers Y . Enfin si A est une partie de X telle que $H|_{A \times [0, 1]}$ est constante, f et g sont dits *homotopes relativement à A* .

Première partie

Théorie des nœuds et topologie algébrique

1 Nœuds et livres ouverts

1.1 Équivalence de nœuds

Définition. Un *nœud* est une partie K de \mathbb{S}^3 homéomorphe au cercle \mathbb{S}^1 . On peut également le voir comme un plongement (i.e. un homéomorphisme sur son image) $K : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$.

Un *entrelacs* $L \subset \mathbb{S}^3$ est une partie homéomorphe à la réunion disjointe de $k \geq 2$ copies de \mathbb{S}^1 .



FIGURE 1 – Exemples de nœuds

Deux nœuds K_1 et K_2 sont dits équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ tel que $h(K_1) = h(K_2)$, ce que l'on note $(\mathbb{S}^3, K_1) \simeq (\mathbb{S}^3, K_2)$.

Remarque. Deux nœuds sont toujours homéomorphes (car homéomorphes à \mathbb{S}^1), donc la transformation de l'espace ambiant \mathbb{S}^3 doit bien être prise en compte pour que la définition d'équivalence ne soit pas vide.

Pourquoi plonger les nœuds dans \mathbb{S}^3 plutôt que dans \mathbb{R}^3 ? On exploite ici la projection stéréographique, grâce à laquelle \mathbb{S}^3 est homéomorphe à $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire \mathbb{R}^3 auquel on adjoint un point « à l'infini ». \mathbb{S}^3 est en fait le *compactifié d'Alexandrov* de \mathbb{R}^3 , or on préférera ici travailler dans un espace ambiant compact. Cela permet également de faire passer les nœuds par l'infini de \mathbb{R}^3 ; c'est ce que l'on appelle les nœuds longs³.

La question centrale en théorie des nœuds est, étant donné un nœud K , de déterminer sa classe d'équivalence. On a pour ce faire le théorème suivant.

Théorème. (Gordon-Luecke, 1989) Deux nœuds K_1 et K_2 sont équivalents si et seulement si leurs complémentaires $\mathbb{S}^3 \setminus K_1$ et $\mathbb{S}^3 \setminus K_2$ sont homéomorphes :

$$(\mathbb{S}^3, K_1) \simeq (\mathbb{S}^3, K_2) \iff \mathbb{S}^3 \setminus K_1 \simeq \mathbb{S}^3 \setminus K_2$$

Ceci ramène donc le problème d'équivalence des nœuds à l'étude de leur complémentaire dans \mathbb{S}^3 (par exemple via $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$, qu'on appelle le groupe du nœud).

3. Par exemple, le nœud trivial peut être représenté par un cercle habituel dans \mathbb{R}^3 , mais également comme une droite de \mathbb{R}^3 , qui est la projection stéréographique d'un cercle dans \mathbb{S}^3 passant par le pôle de la projection.

1.2 Nœuds fibrés

On s'intéresse à une classe de nœuds dont le complémentaire possède une structure particulière de fibré sur \mathbb{S}^1 . Un fibré est un espace qui est localement homéomorphe à un produit de deux espaces B et F .

Définition. Soient E, B, F des espaces topologiques séparés et $p : E \rightarrow B$ une application continue. On dit que p est un *fibré d'espace total* E , de *fibre* F et de *base* B si pour tout b dans B , il existe \mathcal{U} un voisinage de b et $\phi : p^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \times F$ un homéomorphisme — dit de *trivialisatation locale* — tels que le diagramme suivant commute⁴ (où π_1 désigne la projection sur la première composante).

$$\begin{array}{ccc} E \supset p^{-1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{U} \times F \\ & \searrow p & \swarrow \pi_1 \\ & \mathcal{U} \subset B & \end{array}$$

On notera que pour tout b dans B , $p^{-1}(\{b\})$ est homéomorphe à F . Un exemple de fibré est le ruban de Möbius qui fibre sur le cercle \mathbb{S}^1 avec comme fibre le segment $[0, 1]$ — mais n'est pourtant pas homéomorphe à l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.

1.2.1 Livres ouverts et tores de suspension

Il s'agit d'une certaine structure de fibré que l'on retrouve sur les complémentaires de nœuds. On introduit d'abord pour un nœud K la notion de *surface de Seifert* de K . Il s'agit d'une surface compacte et orientable dont le bord est K . Par exemple, le disque fermé $\overline{\mathbb{D}^2}$ est une surface de Seifert pour le nœud trivial.

Définition. Une *décomposition en livre ouvert* d'une 3-variété M est une paire (K, p) où :

1. K est un nœud ou un entrelacs, appelé la *reliure* du livre ouvert ;
2. $p : M \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$ est un fibré — de fibre Σ une surface — tel que pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, on a $p^{-1}(\theta) = \overset{\circ}{\Sigma}_\theta$ où Σ_θ est une surface de Seifert de K qu'on appellera une *page* du livre ouvert.

Si M se décompose en livre ouvert via (K, p) , on dispose ainsi d'une famille de surfaces Σ_θ indexée par $[0, 1]$ (avec $\Sigma_0 = \Sigma_1$), qui sont toutes homéomorphes entre elles et dont le bord est K . Ces surfaces sont telles que le complémentaire de K dans M est « continûment parcouru » par les Σ_θ pour θ variant entre 0 et 1 (cf. Figure 2).

4. Cela signifie que $p|_{p^{-1}(\mathcal{U})} = \pi_1 \circ \phi$, c'est-à-dire que ϕ est de la forme

$$\begin{aligned} \phi : p^{-1}(\mathcal{U}) &\simeq \mathcal{U} \times F \\ y &\longmapsto (p(y), \sigma(y)) \end{aligned}$$

où $\sigma : p^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow F$ est une application continue.

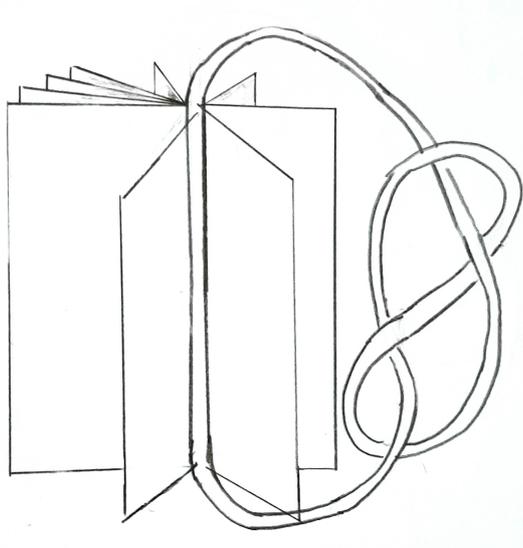


FIGURE 2 – Décomposition en livre ouvert

Définition. Un *livre ouvert abstrait* est une paire (Σ, Φ) où :

1. Σ est une surface compacte orientable à bord ;
2. $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est un difféomorphisme, appelé la *monodromie*, tel que f est l'identité sur $\partial\Sigma$.

Dans ce contexte, on appelle *tore de suspension* de f l'espace

$$\Sigma_f = \Sigma \times [0, 1] / \sim \quad \text{où } (x, 1) \sim (f(x), 0)$$

L'idée est de considérer le cylindre $\Sigma \times [0, 1]$ et de recoller $\Sigma \times \{0\}$ et $\Sigma \times \{1\}$ via le difféomorphisme f . Σ_f est alors une variété à bord de dimension 3, de bord $\partial\Sigma \times \mathbb{S}^1$, qui est munie d'une structure de fibré (d'espace de base \mathbb{S}^1 et de fibre Σ) via

$$p : (x, \theta) \in \Sigma_f \rightarrow \theta \in \mathbb{S}^1.$$

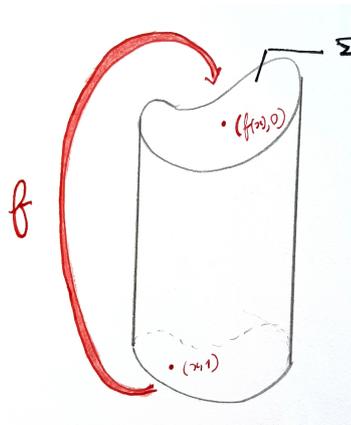


FIGURE 3 – Tore de suspension

Ces livres ouverts abstraits fournissent l'exemple typique de décomposition en livre ouvert. En effet, étant donné un tel (Σ, f) , on peut construire une 3-variété M telle que $(\partial\Sigma, \pi)$ décompose M en livre ouvert, de sorte que le complémentaire de $\partial\Sigma$ dans M soit précisément l'intérieur du tore de suspension Σ_f de la monodromie f .

Définition. Un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$ est dit *fibré* s'il existe (Σ, f) livre ouvert abstrait tel que \mathbb{S}^3 admette une décomposition en livre ouvert de la forme (K, p) de fibration $p : \Sigma_f \rightarrow \mathbb{S}^1$. En particulier, le complémentaire de K dans \mathbb{S}^3 est homéomorphe à l'intérieur du tore de suspension Σ_f , f étant appelée la *monodromie de K* .

Ainsi, un nœud fibré K est tel que l'on dispose de $(\Sigma_\theta)_{\theta \in \mathbb{S}^1}$ famille de copies de Σ qui remplissent continûment le complémentaire de K . Imaginons alors choisir un point (x, t) dans $\mathbb{S}^3 \setminus K \simeq \Sigma_f$ et suivre sa trajectoire le long des surfaces Σ_θ pour θ variant dans \mathbb{S}^1 . Lorsque l'on revient à la surface Σ_t de départ, on retourne au point $(f(x), t)$, car on a appliqué f pour le recollement⁵. C'est pourquoi la monodromie est également appelée l'*application de premier retour*.

1.2.2 Décomposition en livre ouvert du complémentaire du nœud trivial

Le premier exemple d'un nœud fibré est tout simplement le nœud trivial O , c'est-à-dire un cercle non noué plongé dans \mathbb{S}^3 . Le disque intérieur $\overline{\mathbb{D}^2}$ bordé par ce cercle est une surface de Seifert pour O .

Proposition. Le complémentaire du nœud trivial dans \mathbb{S}^3 fibre sur \mathbb{S}^1 , la fibre étant un disque et la monodromie l'identité.

Pour comprendre le caractère fibré de son complémentaire, on peut imaginer ce cercle comme un arceau de métal que l'on a plongé dans de l'eau savonneuse puis ressorti. Le disque intérieur contient alors une bulle de savon, et on peut souffler sur cette bulle en se plaçant au dessus du cercle pour la faire grossir et grossir encore. Elle remplit de plus en plus d'espace, jusqu'à ce qu'elle explose en passant par le point à l'infini pour remplir le complémentaire de $\overline{\mathbb{D}^2}$ dans le plan. Ceci définit les surfaces Σ_θ pour $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ qui sont toutes homéomorphes à $\overline{\mathbb{D}^2}$ et qui remplissent un demi-espace dans $\mathbb{S}^3 \setminus O$.

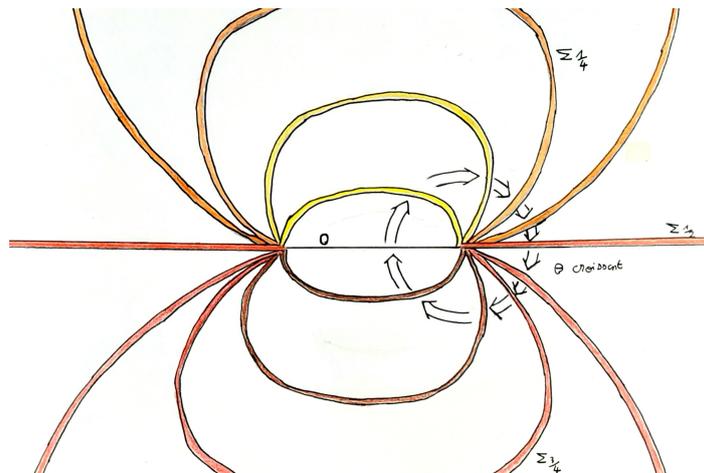


FIGURE 4 – Fibration du complémentaire du nœud trivial (vue en coupe dans le plan perpendiculaire à O)

Pour construire le reste de ces surfaces, on peut procéder de même en repartant de la situation initiale et en grossissant la bulle cette fois depuis le dessous du cercle. Ceci forme une décomposition en livre ouvert de \mathbb{S}^3 de reliure O et de page $\overline{\mathbb{D}^2}$. La monodromie est l'identité de $\overline{\mathbb{D}^2}$; on verra plus tard que dans ce cas précis c'est la seule monodromie possible à isotopie près. Le tore de suspension $\overline{\mathbb{D}^2}_{Id}$ s'identifie à $\overline{\mathbb{D}^2} \times \mathbb{S}^1$ le tore solide :

$$\mathbb{S}^3 \setminus O \simeq \overline{\mathbb{D}^2} \times \mathbb{S}^1$$

De la même façon ceci reste vrai si l'on considère un voisinage tubulaire du nœud trivial plutôt que le nœud seul. En particulier $\mathbb{S}^3 \setminus (\overline{\mathbb{D}^2} \times \mathbb{S}^1) \simeq \overline{\mathbb{D}^2} \times \mathbb{S}^1$, c'est à dire que le complémentaire d'un tore dans \mathbb{S}^3 est aussi un tore !

D'autres exemples plus élaborés de nœuds fibrés seront présentés par la suite.

5. Cette remarque informelle sera précisée lors de notre étude des systèmes dynamiques, dans la section 4.1.

1.2.3 La monodromie est définie à isotopie près.

Lemme de recollement : Soit Σ une surface compacte et orientée, f_0 et f_1 deux homéomorphismes de Σ isotopes par rapport à $\partial\Sigma$. Alors leurs tores de suspension Σ_{f_0} et Σ_{f_1} sont homéomorphes.

Démonstration. Soit $(f_t)_{0 \leq t \leq 1}$ isotopie entre f_0 et f_1 telle que pour tout t dans $[0, 1]$, $f_{t|\partial\Sigma} = Id_{\partial\Sigma}$. On définit l'homéomorphisme Φ par :

$$\begin{aligned} \Phi : \Sigma \times [0, 1] &\longrightarrow \Sigma \times [0, 1] \\ (x, t) &\longmapsto (f_{1-t} \circ f_0^{-1}(x), t) \end{aligned}$$

Il convient de noter que $\Phi|_{\Sigma \times \{1\}} = Id_{\Sigma}$ et $\Phi|_{\Sigma \times \{0\}} = f_1 \circ f_0^{-1}$.

On note \sim_0 (resp. \sim_1) la relation d'équivalence engendrée par $(x, 1) \sim_0 (f_0(x), 0)$ (resp. $(x, 1) \sim_1 (f_1(x), 0)$)
Alors, pour $x, y \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} (x, 1) \sim_0 (y, 0) &\iff f_0(x) = y \\ &\iff f_1(x) = f_1 \circ f_0^{-1}(y) \\ &\iff (x, 1) \sim_1 (f_1 \circ f_0^{-1}(y), 0) \\ &\iff \Phi(x, 1) \sim_1 \Phi(y, 0) \end{aligned}$$

Φ passe donc au quotient en une application continue et bijective $\bar{\Phi} : \Sigma_{f_0} \rightarrow \Sigma_{f_1}$. Puisque Σ_{f_0} est compact, c'est aussi un homéomorphisme. \square

Ainsi la monodromie n'est bien définie qu'à isotopie près. C'est un élément de $\text{Hom}(\Sigma)/\text{isotopie}$, groupe central dans l'étude des surfaces, appelé *groupe modulaire*.

2 Surfaces et groupe modulaire

Il existe une loi de composition interne sur les surfaces, appelée la *somme connexe*. Étant donné deux surfaces Σ_1 et Σ_2 , on retire des disques D_1 et D_2 respectivement à Σ_1 et Σ_2 , et on recolle $\Sigma_1 \setminus D_1$ et $\Sigma_2 \setminus D_2$ le long des cercles bordant D_1 et D_2 . L'espace obtenu est $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ la somme connexe des deux surfaces, qui est toujours une surface. Cette opération est commutative et associative, et la sphère \mathbb{S}^2 en est l'élément neutre (ainsi par convention une somme connexe vide est égale à \mathbb{S}^2).

Dans l'étude des surfaces de Seifert, on s'intéresse tout particulièrement aux surfaces compactes et orientables. On a pour celles-ci le théorème de classification suivant.

Théorème de classification des surfaces. Soit Σ une surface à bord compacte et orientable. Alors Σ est homéomorphe à la somme connexe de $g \geq 0$ tores à laquelle on a retiré $b \geq 0$ disques intérieurs, notée $\Sigma_{g,b}$.

L'ensemble des classes d'homéomorphisme de telles surfaces est donc indexé par \mathbb{N}^2 . la surface $\Sigma_{g,b}$ est une surface dite de *genre* g (i.e. à g « trous ») et à b composantes de bord. $\Sigma_{0,0}$ est la sphère \mathbb{S}^2 , $\Sigma_{1,0}$ est le tore \mathbb{T}^2 et $\Sigma_{0,2}$ est l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.

Il existe sur les surfaces un invariant d'un grand intérêt mathématique et historique : la caractéristique d'Euler. Elle se calcule aisément sur les surfaces qui s'obtiennent comme recollement de polygones le long de leurs arêtes⁶, à la manière de la construction des polyèdres à partir d'un patron que l'on plie et que l'on recolle.

Définition. Soit Σ une surface obtenue par recollement de polygones. On note F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets de Σ . La *caractéristique d'Euler* de Σ est le nombre

$$\chi(\Sigma) = F - A + S.$$

On ne détaillera pas plus ici, mais la caractéristique d'Euler est invariante par homéomorphisme, et on peut montrer que l'on a⁷ :

$$\chi(\Sigma_{g,b}) = 2 - 2g - b$$

Ainsi la sphère est de caractéristique 2 et le tore de caractéristique 0. On peut également obtenir ce dernier résultat en étudiant la construction du tore à partir d'un carré dont on identifie les côtés opposés : on obtient après identification une face, deux arêtes et un sommet, et $1 - 2 + 1 = 0$.

2.1 Construction du groupe modulaire

Soit Σ une surface compacte et orientable. $\text{Hom}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ est le groupe des homéomorphismes de Σ qui préservent l'orientation et qui se restreignent à l'identité sur $\partial\Sigma$. On peut le munir d'un topologie qui rend les opérations de groupe continues, i.e. telle que $\text{Hom}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ soit un groupe topologique⁸.

On pose une relation d'équivalence \sim sur $\text{Hom}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$:
 $f \sim g$ si et seulement si f et g sont *isotopes*⁹ relativement à $\partial\Sigma$, plus précisément s'il existe

$$\begin{aligned} H : \Sigma \times [0, 1] &\rightarrow \Sigma \\ (x, t) &\mapsto h_t(x) \end{aligned}$$

telle que H est continue avec, pour tout t dans $[0, 1]$ $h_t \in \text{Hom}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$, $h_0 = f$ et $h_1 = g$. Cela revient à dire que f et g sont équivalents si et seulement si ils sont dans la même composante connexe par arcs.

On note $\text{Hom}_0(\Sigma, \partial\Sigma)$ la classe de l'identité pour cette relation. Elle constitue un sous-groupe (distingué) de $\text{Hom}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ tel que l'on a $f \sim g$ si et seulement si $g^{-1} \circ f$ est dans $\text{Hom}_0(\Sigma, \partial\Sigma)$.

6. Or un théorème de Rado énonce que toute surface compacte est triangulable, i.e. on peut la recouvrir par un nombre fini de triangles.

7. Ceci s'obtient grâce aux formules $\chi(\Sigma_1 \# \Sigma_2) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2$ et $\chi(\Sigma') = \chi(\Sigma)$ si Σ' est la surface obtenue en retirant un disque intérieur à Σ , que l'on prouve toutes deux en considérant des triangulations des surfaces considérées.

8. Il s'agit de la topologie *compacte-ouverte*, que l'on peut définir plus généralement sur l'espace $C(X, Y)$ des applications continues de X vers Y et qui est telle que (pour X localement compact)

$$\begin{aligned} f : Z \rightarrow C(X, Y) \text{ continue} &\iff F : Z \times X \rightarrow Y \text{ continue} \\ &(z, x) \mapsto f(z)(x) \end{aligned}$$

9. Il suffit en réalité d'exiger que f et g soient homotopes relativement à $\partial\Sigma$ - i.e. sans imposer que chaque étape h_t soit un homéomorphisme - car selon un théorème de Baer deux homéomorphismes qui préservent l'orientation sont isotopes s'ils sont homotopes.

Définition. Le *groupe modulaire* (ou *mapping class group*) d'une surface Σ , noté $Mod(\Sigma)$, est le groupe quotient défini par :

$$Mod(\Sigma) = Hom^+(\Sigma, \partial\Sigma)/Hom_0(\Sigma, \partial\Sigma) \simeq Hom^+(\Sigma, \partial\Sigma)/\sim$$

C'est donc le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes de Σ qui préservent l'orientation et qui agissent trivialement sur $\partial\Sigma$.

2.2 Exemples de groupe modulaire

2.2.1 Cas du disque

Proposition. (Lemme d'Alexander) On a $Mod(\overline{\mathbb{D}^2}) = \{Id\}$.

L'idée est d'appliquer Φ sur un disque intérieur dont le rayon tend vers 0, en exploitant le fait que $\Phi|_{\partial\mathbb{D}} = Id$ pour raccorder avec l'identité.

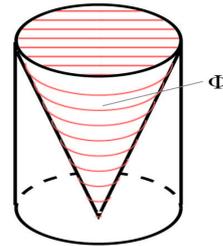


FIGURE 5 – Homotopie de Φ vers l'identité

Démonstration. On voit $\overline{\mathbb{D}^2}$ comme $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$. Soit $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ un homéomorphisme tel que $\Phi|_{\partial\mathbb{D}} = Id_{\partial\mathbb{D}}$. On pose :

$$H(x, t) = \begin{cases} (1-t)\Phi(\frac{x}{1-t}), & \text{si } 0 \leq \|x\| \leq 1-t \\ x & \text{si } 1-t \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Le raccordement en $\|x\| = 1-t$ est bien continu car $\Phi|_{\partial\mathbb{D}} = Id$, et H est bien une isotopie de Φ vers l'identité. \square

On voit donc a posteriori que dans le cas du nœud trivial, où la surface Σ est un disque, l'identité est la seule monodromie possible!

2.2.2 Cas de l'anneau

On considère l'anneau $A \simeq \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. On peut également le voir comme $A = \tilde{A}/\mathbb{Z}$, où $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$ et \mathbb{Z} agit par translation entière¹⁰.

Proposition. $Mod(A) = \mathbb{Z}$.

Ce résultat est intimement lié au fait que le groupe fondamental du cercle est \mathbb{Z} et que A et \mathbb{S}^1 ont même groupe fondamental. L'idée de la preuve est d'étudier l'action d'un élément f de $Mod(A)$ sur la classe d'homotopie d'un rayon δ reliant les deux bords de l'anneau. Le seul comportement possible pour l'image de δ par f est de faire un nombre entier n de tours autour de l'anneau. On montre que cet entier détermine entièrement f . Ainsi, un générateur de $Mod(A)$ sera un élément dont l'action sur δ implique un tour autour de l'anneau.

10. \tilde{A} est alors un revêtement de A . - i.e. (\tilde{A}, A, p) est un fibré de fibre discrète - avec \tilde{A} connexe et simplement connexe. C'est ce que l'on appelle le revêtement universel de A .

Démonstration. Soit $f \in \text{Mod}(A)$ et $\Phi : A \rightarrow A$ un représentant de f . On admet que l'on peut relever Φ en $\tilde{\Phi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ telle que le diagramme suivant commute, i.e. $\pi \circ \tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi$, avec de plus $\tilde{\Phi}(0,0) = (0,0)$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \tilde{A} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{\Phi} & A \end{array}$$

$\Phi|_{\partial A} = \text{Id}$ donc $\tilde{\Phi}$ agit comme une translation par un entier sur $\mathbb{R} \times \{1\}$. On note alors $\tilde{\Phi}_1$ la restriction de $\tilde{\Phi}$ à $\mathbb{R} \times \{1\}$ et on pose

$$\rho(f) = \tilde{\Phi}_1(0) \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi définie, ρ est indépendante du représentant : en effet si Ψ est isotope à Φ par rapport à ∂A , on peut relever cette isotopie en $(\tilde{h}_t)_{t \in [0,1]}$ isotopie de $\tilde{\Phi}$ vers $\tilde{\Psi}$, or $t \mapsto \tilde{h}_t(0,1)$ est continue à valeur dans \mathbb{Z} donc constante par connexité de $[0,1]$, donc $\tilde{\Phi}_1(0) = \tilde{\Psi}_1(0)$.

De plus, ρ est un morphisme de groupes, car composer f et g revient à appliquer successivement les deux translations associées au point $(0,1)$, ce qui justifie la relation

$$\rho(g \circ f) = \rho(g) + \rho(f).$$

De manière équivalente, on peut définir ρ en étudiant l'action de f sur $\pi_1(A) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$, c'est-à-dire sur les arcs paramétrés dans A . Soit donc δ rayon reliant les deux bords de A , par exemple $\delta = \{0\} \times [0,1]$.

$\delta^{-1} \cdot \Phi(\delta)$ est alors un lacet basé en $\delta(0) = (\bar{0}, 0)$, et on peut poser

$$\rho(f) = [\delta^{-1} \cdot \Phi(\delta)] \in \pi_1(A) \simeq \mathbb{Z}.$$

$\rho(f)$ est ainsi bien défini et correspond à l'extrémité de l'unique relevé $\tilde{\delta}$ de δ basé en $(0,0)$, ce qui montre l'équivalence des deux définitions.

ρ est surjective. Soit $n \in \mathbb{Z}$. La transformation linéaire de \mathbb{R}^2 définie par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

laisse $\mathbb{R} \times [0,1]$ stable, agit comme l'identité sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ et comme la translation par n sur $\mathbb{R} \times \{1\}$. Elle passe donc au quotient en $f_M : A \rightarrow A$ telle que $\rho(f_M) = n$.

ρ est injective. Soit $f \in \ker(\rho)$, Φ représentant de f et $\tilde{\Phi}$ relevé de Φ qui fixe l'origine. $\rho(f) = 0$ signifie que $\tilde{\Phi}_1(0) = 0$, d'où $\tilde{\Phi}_1 = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{\Phi}|_{\partial \tilde{A}} = \text{Id}_{\partial \tilde{A}}$. Dès lors, l'isotopie entre $\tilde{\Phi}$ et l'identité obtenue par $h_t = (1-t) \cdot \tilde{\Phi} + t \cdot \text{Id}$ fixe $\partial \tilde{A}$ et passe au quotient en une isotopie entre Φ et $\text{Id}|_{\partial A}$, d'où $f = 1$. \square

On a donc bien établi que $\text{Mod}(A) = \mathbb{Z}$. De plus, on peut en exhiber un générateur, i.e. un élément Φ de $\text{Hom}^+(A, \partial A)$ tel que $\rho(\Phi) = 1$. Posons

$$\begin{aligned} \tau : A &\longrightarrow A \\ (\theta, t) &\mapsto (\theta + 2\pi t, t) \end{aligned}$$

τ ainsi défini engendre $\text{Mod}(A)$ et est appelé un *twist de Dehn*.

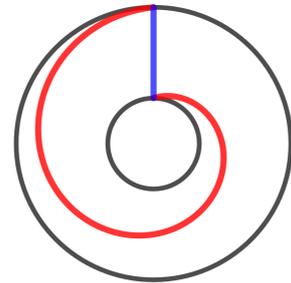


FIGURE 6 – Image (rouge) d'un rayon (bleu) par un twist de Dehn

2.2.3 Cas du tore

On a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ de groupe fondamental \mathbb{Z}^2 et de revêtement universel \mathbb{R}^2 . Ainsi, on peut voir le tore comme le plan \mathbb{R}^2 que l'on a recouvert par des copies du carré $[0,1]^2$ — de façon à former un quadrillage — puis où on a identifié tous ces carrés.

Proposition. On a $\text{Mod}(\mathbb{T}^2) = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

On pourra consulter [FM11] pour une preuve rigoureuse de ce résultat, qui ne sera pas détaillée ici. En reprenant le point de vue décrit ci-dessus, l'idée de la preuve est de relever Φ homéomorphisme de \mathbb{T}^2 en un homéomorphisme $\tilde{\Phi}$ de \mathbb{R}^2 et d'étudier l'action de $\tilde{\Phi}$ sur le carré $[0, 1]^2$.

On peut voir que $\tilde{\Phi}([0, 1]^2)$ est nécessairement un parallélogramme déformé, dont les côtés ne sont pas nécessairement des segments mais dont les sommets sont à coordonnées entières. Par isotopie, on peut se ramener à un véritable parallélogramme, et on voit alors que tout élément de $\text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ possède un représentant linéaire qui envoie $(0, 1)$ et $(1, 0)$ sur des points à coordonnées entières. De plus, la condition de préserver l'orientation impose que ce représentant soit un élément de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, d'où on obtient le résultat.

3 Exemples de nœuds fibrés

Cette section s'appuie sur les articles de Pierre Dehornoy *Les nœuds de Lorenz* [Deh11] et *On the zeroes of the Alexander polynomial of a Lorenz knot* [Deh15].

Les preuves rigoureuses de fibration des nœuds étant très techniques et peu éclairantes, on ne donnera ici que des idées de preuve des résultats, en privilégiant une compréhension visuelle des phénomènes en jeu. En particulier, on ne calculera pas explicitement les monodromies.

Il sera ici utile de remarquer que \mathbb{S}^3 , qui est la sphère unité de \mathbb{R}^4 , peut également être vue comme la sphère unité de \mathbb{C}^2 : $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$.

Ainsi, l'ensemble $K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3, z_1 = 0\}$ est un nœud trivial dans \mathbb{S}^3 . On peut s'en convaincre en remarquant que la projection stéréographique envoie cet ensemble sur une droite de \mathbb{R}^3 ou bien sur un cercle, selon si l'on passe par le pôle de la projection ou pas.

Ceci fournit une preuve que le nœud trivial est fibré. En effet, son complémentaire dans \mathbb{S}^3 est alors $\mathbb{S}^3 \setminus K = \{(z_1, z_2), z_1 \neq 0\}$ que l'on peut fibrer par

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^3 \setminus K &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z_1, z_2) &\mapsto \arg(z_1) \end{aligned}$$

On peut montrer que les ensembles $\Sigma_\theta = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3, \arg(z_1) = \theta\}$ sont bien des surfaces de Seifert pour K qui fibrent son complémentaire. Ces surfaces se projettent dans \mathbb{R}^3 sur les surfaces définies en 1.2.2 pour une projection stéréographique de pôle $(1, 0)$. Si l'on choisit plutôt $(0, 1)$ comme pôle de la projection (ce qui projette K sur une droite), les Σ_θ sont envoyées sur des demi plans tournant autour de K .

3.1 Entrelacs de Hopf

On appelle *entrelacs de Hopf* l'entrelacs formé de deux nœuds triviaux entrelacés (comme deux maillons d'une chaîne), noté H .

Comment obtenir une surface de Seifert pour H ? Prenons une bande de papier. Si l'on recolle simplement les deux bouts, on obtient un anneau dont le bord est constitué de deux nœuds triviaux non entrelacés. Si l'on commence par tordre d'un demi-tour la bande avant de recoller, on obtient un ruban de Möbius, non orientable, dont le bord est cette fois ci un unique cercle non noué.

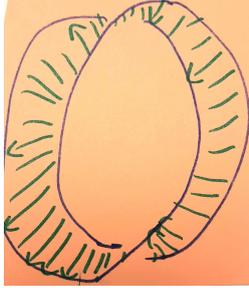


FIGURE 7 – Entrelacs de Hopf

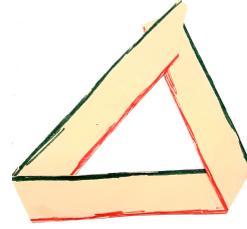


FIGURE 8 – Surface de Seifert de H

Enfin, si l'on fait faire deux demi-tours à la bande puis qu'on recolle, on obtient une surface qui est de nouveau orientable, et qui est même homéomorphe à l'anneau initial $A = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.¹¹ De plus, son bord est cette fois-ci un entrelacs de Hopf!

Ainsi l'anneau A (sur lequel on a effectué deux demi-tours, ce qui ne change pas sa classe d'homéomorphisme) est une surface de Seifert pour H . On pouvait également voir cela en « remplissant » l'espace entre les deux composantes de H , on obtient bien un anneau avec deux torsions.

Proposition. Le complémentaire de l'entrelacs de Hopf dans \mathbb{S}^3 fibre sur \mathbb{S}^1 , la fibre étant un anneau et la monodromie un twist de Dehn.

On a deux manières de comprendre ce résultat. Tout d'abord, du point de vue analytique, on peut plonger H dans \mathbb{S}^3 via $H \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3, z_1 z_2 = 0\}$. C'est l'union des ensembles $\{z_1 = 0\}$ et $\{z_2 = 0\}$, qui sont tous deux des nœuds triviaux. On voit qu'ils sont entrelacés, car une projection stéréographique convenable les envoie sur une droite et un cercle entourant cette droite.

Dès lors, le complémentaire est $\mathbb{S}^3 \setminus H = \{(z_1, z_2), z_1 z_2 \neq 0\}$. Tout comme dans le cas du nœud trivial, on peut lui adjoindre une structure de fibré sur \mathbb{S}^1 en considérant l'argument de $z_1 z_2$. Les ensembles $\{\arg(z_1 z_2) = \theta\}$ pour θ dans \mathbb{S}^1 sont des surfaces de Seifert de H .¹²

De manière plus visuelle, on peut dessiner H sur un tore, de sorte que l'anneau, surface de Seifert de H , soit inclus dans la surface du tore.

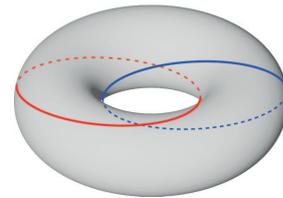


FIGURE 9 – Entrelacs de Hopf sur un tore

L'intérêt d'utiliser un tore ainsi est que, comme on l'a vu en 1.2.2, le complémentaire d'un tore dans \mathbb{S}^3 est également un tore! Il suffit ainsi de définir uniquement le comportement de surfaces de fibration à l'intérieur du tore solide considéré et le reste s'en déduit en appliquant le même procédé au tore extérieur.

On ne s'étendra pas plus sur cet exemple, mais ceci permet de voir que la monodromie est effectivement un twist de Dehn en étudiant son action sur les chemins dans l'anneau.

11. Plus généralement, la surface obtenue après n twists dépend uniquement de la parité de n : si n est pair c'est un anneau, sinon c'est un ruban de Möbius.

12. Une manière plus simple de les paramétrer est d'exploiter l'équivalence $\arg(z) = \theta \iff \frac{\Im z}{\Re z} = \tan(\theta)$.

3.2 Nœud de trèfle

Il s'agit du nœud non trivial le plus simple et le seul dont la projection minimale a trois croisements.

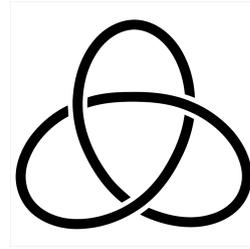


FIGURE 10 – Nœud de trèfle

Comment construire une surface de Seifert pour le nœud de trèfle ? Reprenons notre bande de papier qui nous a servi pour l'entrelacs de Hopf et donnons lui trois torsions avant de recoller les bouts : la surface obtenue a pour bord le nœud de trèfle. Cependant, il s'agit ici d'une surface non orientable, homéomorphe au ruban de Möbius.¹³ Il ne s'agit donc pas d'une surface de Seifert du nœud de trèfle.

Il existe cependant un algorithme, mis au point par Herbert Seifert, qui permet de construire une surface de Seifert pour tout nœud. On ne détaillera pas cet algorithme, mais voici la surface obtenue dans le cas du nœud de trèfle.

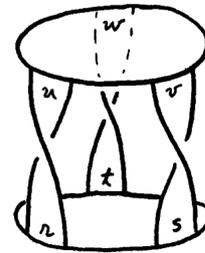


FIGURE 11 – Surface de Seifert du trèfle
(Source : [Rol03])

On voit qu'il s'agit de deux disques reliés par trois rubans. Or un disque est de caractéristique d'Euler 1, car il est homéomorphe à un triangle. De plus, le raccordement de deux disques par un ruban revient à ajouter une face et deux côtés à un découpage en polygones donc à diminuer sa caractéristique de 1.

Si d est le nombre de disques et r le nombre de rubans, on a donc $\chi = d - s$. Or on sait que $\chi(\Sigma_{g,b}) = 2 - 2g - b$. Ici le bord de la surface est le nœud de trèfle qui a une composante, d'où

$$2 - 3 = \chi = 2 - 2g - 1, \text{ et } g = 1.$$

Ainsi la surface obtenue en figure 11 est en réalité de genre 1, c'est-à-dire un tore ! La surface $\Sigma_{1,1}$ est donc une surface de Seifert pour le nœud de trèfle.

Proposition. Le complémentaire du nœud de trèfle dans \mathbb{S}^3 fibre sur \mathbb{S}^1 , la fibre étant un tore à une composante de bord et la monodromie associée à la matrice

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme dans le cas de l'entrelacs de Hopf, on a deux approches pour prouver ceci. De manière analytique, on a que $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3, z_1^3 + z_2^2 = 0\}$ est un nœud de trèfle. Il suffit alors de fibrer son complémentaire avec l'argument de $z_1^3 + z_2^2$.

13. Ceci illustre le fait que les homéomorphismes ne conservent pas le caractère noué, car le bord du ruban de Möbius classique est lui un nœud trivial.

Plus généralement, un entrelacs qui peut être défini comme lieu d'annulation d'un fonction polynômiale sur \mathbb{S}^3 est appelé *algébrique*. Comme on l'a vu, c'est par exemple le cas du nœud trivial, de l'entrelacs de Hopf et du nœud de trèfle. Un tel entrelacs est toujours fibré, en utilisant comme fibration sur \mathbb{S}^1 l'argument du polynôme correspondant, comme l'a prouvé John Milnor dans son article *Singular Points of Complex Hypersurfaces* [Mil68].

De manière plus graphique, le nœud de trèfle appartient comme l'entrelacs de Hopf à la classe des nœuds *toriques*, i.e. les nœuds qui peuvent se réaliser à la surface d'un tore. Ceci permet de visualiser le mouvement des surfaces de Seifert à l'intérieur de ce tore solide, puis de définir le reste dans le tore complémentaire dans \mathbb{S}^3 . On se référera à *Knots and links* [Rol03] p.327-33 pour plus de détails.

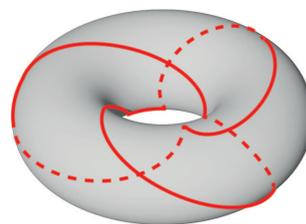


FIGURE 12 – Nœud de trèfle sur un tore

Cette vidéo issue de l'article *Lorenz and modular flows : a visual introduction* [GL06] illustre visuellement et de manière très claire cette notion de nœud fibré, avec l'exemple du nœud de trèfle.

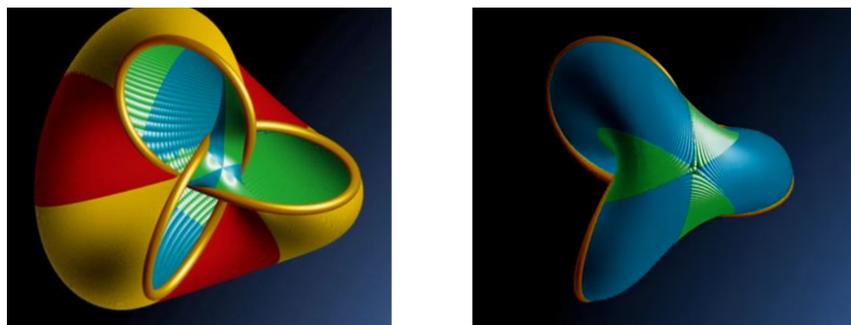


FIGURE 13 – Fibration du complémentaire du nœud de trèfle. (Source : [GL06])

On observe sur cette animation la dynamique de la monodromie du nœud de trèfle. En effet, on voit que les zones bleues et vertes ont opéré un sixième de tour le long du nœud lorsque l'on revient à la surface de Seifert initiale.

Ceci illustre la dynamique de la matrice M_3 définie ci-dessus, qui est cyclique d'ordre 6 dans $Sl_2(\mathbb{Z})$. Il s'agit d'un premier exemple de dynamique liée à la monodromie dans un cas où cette dynamique est très simple — ici tout point est périodique de période au plus 6.

3.3 Nœud de huit

Le nœud de huit, qui orne la page de garde de ce rapport, est le seul nœud dont la projection minimale a quatre croisements, représenté ci-contre.

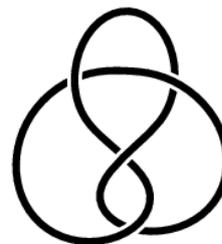


FIGURE 14 – Nœud de huit

Proposition. Le complémentaire du nœud de huit dans \mathbb{S}^3 fibre sur \mathbb{S}^1 , la fibre étant un tore à une composante de bord et la monodromie associée à la matrice

$$M_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le nœud de huit n'étant pas un nœud torique, la méthode visuelle utilisée pour les cas précédents ne s'applique pas. C'est cependant un nœud algébrique (bien que le polynôme associé soit bien plus complexe, cf. [Wik]), ce qui fournit une preuve qu'il est bien fibré.

Nous avons donc enfin rencontré le principal protagoniste : M_8 la monodromie du nœud de huit. Contrairement à M_3 , cette matrice n'est pas d'ordre fini. Bien au contraire, sa dynamique est très complexe et est un exemple représentatif de ce que l'on appelle les *difféomorphismes Anosov*. Mais pour comprendre ceci, il va falloir nous plonger dans la théorie des systèmes dynamiques.

Deuxième partie

Systemes dynamiques et hyperbolicité

4 Introduction aux systemes dynamiques

La théorie des systemes dynamiques étudie le comportement d'un espace sous l'action d'une transformation. En pratique, on considère X un ensemble et deux types possibles de systemes dynamiques sur X :

- Un systeme discret est simplement une bijection $f : X \rightarrow X$, dont on étudie les itérés $f^n = f \circ f \cdots \circ f$.
- Un systeme continu est une famille $f = (f^t : X \rightarrow X)_{t \in \mathbb{R}}$ telle que $f^0 = Id_X$ et $f^t \circ f^s = f^{t+s}$ pour tous t et s : c'est ce que l'on appelle un *flot* sur X .

On se placera souvent dans un cadre plus précis, par exemple avec X un espace topologique ou une variété différentielle et $(f^t)_t$ famille d'homéomorphismes ou de difféomorphismes.

Pour $x \in X$, on définit l'orbite de x comme $O(x) = \{f^t(x)\}_t$, indexée par \mathbb{Z} ou \mathbb{R} selon le cas (discret ou continu). x est un point périodique s'il existe $T > 0$ tel que $f^T(x) = x$. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit invariant si $f^t(A) \subset A$ pour tout t .

On peut alors définir une notion d'équivalence entre systemes dynamiques. Soient $f^t : X \rightarrow X$ et $g^t : Y \rightarrow Y$ deux systemes dynamiques. Une *semi-conjugaison* de (Y, g) vers (X, f) est une application surjective $\pi : Y \rightarrow X$ telle que le diagramme suivant commute, i.e. $f^t \circ \pi = \pi \circ g^t$ pour tout t .

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Lorsqu'une telle semi-conjugaison existe, on dit que (X, f) est un facteur de (Y, g) : (Y, g) est un systeme à la dynamique « au moins aussi compliquée » que celle de (X, f) . Le premier exemple d'une semi-conjugaison est le cas d'un produit. Pour $f = (f_1, f_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \xrightarrow{f} & X_1 \times X_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \end{array}$$

Cela signifie que la projection $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ est une semi-conjugaison de $(X_1 \times X_2, f)$ vers (X_1, f_1) .

Lorsque π est inversible, on parle de *conjugaison* et on a dans ce cas $f = \pi \circ g \circ \pi^{-1}$. On s'attache alors à étudier les systemes dynamiques modulo conjugaison, en essayant pour ce faire d'obtenir des semi-conjugaisons vers des systemes dynamiques plus simples.

4.1 Suspension et section transverse

Si l'on étudie le plus souvent des systemes dynamiques discrets, c'est qu'il existe des outils faisant office de pont entre systemes discrets — l'étude des applications — et systemes continus — l'étude des flots.

Soit $f : X \rightarrow X$ une bijection. On considère l'espace quotient

$$X_f = X \times [0, 1] / (x, 1) \sim ((f(x), 0)).$$

La *suspension* de f est alors le flot ϕ défini sur X_f par :

$$\begin{aligned}\phi^t(x, s) &= (f^n(x), s'), \\ \text{où } n &= \lfloor t + s \rfloor, \quad s' = \{t + s\} = t + s - n.\end{aligned}$$

L'idée est d'avancer le long de $\{x\} \times [0, 1]$ jusqu'à atteindre $(x, 1)$, puis aller en $(f(x), 0)$ pour continuer à avancer le long de $\{f(x)\} \times [0, 1]$. Ainsi, on applique f à chaque fois que l'on traverse la tranche $X \times \{1\}$.

Similairement, on pourrait définir la suspension en considérant l'espace $X \times \mathbb{R}$ quotienté par $(x, s + 1) \sim (f(x), s)$. La suspension de f est alors simplement le flot induit sur le quotient par $\phi^t : (x, s) \mapsto (x, t + s)$.

Évidemment, cela n'est pas sans rappeler les tores de suspensions que l'on a défini plus haut (cf. 1.2.1). Dans le cas où l'espace ambiant est une surface Σ et l'application f un homéomorphisme de Σ dans elle-même, l'espace Σ_f décrit ici est précisément le tore de suspension de f .

Ainsi, étant donné un nœud fibré, on peut naturellement construire un système dynamique continu sur son complémentaire en considérant la suspension de sa monodromie. Ceci fournit une visualisation dans l'espace de la dynamique de la monodromie.

Réciproquement, étant donné un flot ψ sur X , on appelle *section transverse* de ψ un sous-ensemble $A \subset X$ tel que pour tout x dans X , l'ensemble $T_x = \{t \in \mathbb{R}, \psi^t(x) \in A\}$ des temps de passage dans A est discret non vide. L'exemple typique est A une surface dans X une 3-variété, telle que A coupe les trajectoires du flot de sorte que tout point repasse en A en les temps entiers.

Dans ce contexte, on peut définir pour tout point a de A le *temps de retour* $\tau(a) = \min T_a$. Dès lors, l'*application de premier retour* est définie par

$$\begin{aligned}g : A &\rightarrow A \\ a &\mapsto \psi^{\tau(a)}(a).\end{aligned}$$

Ainsi, $g(a)$ est le premier point dans l'orbite de a dans les temps strictement positifs qui rencontre A ; littéralement, le premier retour de a dans A sous l'action du flot ψ .

Ceci formalise la remarque faite en 1.2.2. En effet, étudier la trajectoire des points dans le complémentaire d'un nœud fibré selon la suspension de sa monodromie correspond à l'intuition de « suivre le mouvement » des surfaces Σ_θ qui remplissent l'espace.

De plus, dans le cas d'un tore de suspension, $X \times \{0\}$ est une section transverse du flot de suspension et *la monodromie est l'application de premier retour de la suspension*.

4.2 Décalages et sous-décalages

Un exemple central de système dynamique discret est celui du décalage, point de base de la branche de la dynamique symbolique. On fixe un entier $m > 1$ et l'alphabet $\mathfrak{A}_m = \{1, \dots, m\}$. Soit $\Sigma_m = \mathfrak{A}_m^{\mathbb{Z}} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, x_i \in \mathfrak{A}_m\}$ l'ensemble des mots infinis sur l'alphabet \mathfrak{A}_m . On définit l'application σ par :

$$\begin{aligned}\sigma : \Sigma_m &\longrightarrow \Sigma_m \\ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} &\mapsto \sigma(x) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

σ est telle que $\sigma(x)$ est le mot x décalé d'un rang vers la gauche. (Σ_m, σ) est alors un système dynamique, appelé le *décalage*. Par ailleurs, munir Σ_m de la topologie produit le rend compact et fait de σ un homéomorphisme.

Dans ce contexte, un *sous-décalage* est une partie (fermée) $X \subset \Sigma_m$ invariante pour σ . En particulier, un sous-décalage est dit *de type fini* (noté SFT pour *subshift of finite type*) s'il existe une liste (finie) de syllabes interdites ij où $i, j \in \mathfrak{A}_m$ telle que X est précisément l'ensemble des mots de Σ_m qui ne contiennent aucune syllabe interdite. On parle également de *chaîne de Markov topologique*.

Étant donné un SFT X , on peut lui associer un graphe orienté Γ de la manière suivante. On prend \mathfrak{A}_m comme ensemble de sommets et on trace une arête de i vers j si et seulement si la syllabe ij est autorisée. X code alors l'ensemble des chemins infinis admissibles le long des arêtes du graphe Γ (x_i est le sommet visité au temps i) et appliquer σ à un mot de X revient à avancer le long d'une arête dans le graphe. On peut également construire la matrice d'adjacence A de ce graphe telle que $A_{ij} = 1$ s'il y a une arête de i vers j et 0 sinon. X est alors également l'ensemble des mots x tels que $A_{x_i x_{i+1}} > 0$ pour tout i .

Pour toute matrice A à coefficients dans $\{0, 1\}$, cette même construction fournit un exemple de SFT Σ_A tel que le décalage σ admet $\text{Tr}(A)$ points fixes dans Σ_A et de même $\text{Tr}(A^n)$ points périodiques de période n . Les SFT sont ainsi un exemple de système dynamique très simple à étudier, par exemple via la matrice d'adjacence associée. Il est donc courant de chercher une semi-conjugaison du système dynamique que l'on étudie vers un SFT.

4.3 Codage en itinéraires et partitions de Markov

Soit (X, f) un système dynamique discret. On considère une partition de X en $(P_i)_{1 \leq i \leq m}$. Pour $x \in X$, on note $\psi(x)$ l'indice tel que $x \in P_{\psi(x)}$. La suite $(\psi(f^n(x)))_{n \in \mathbb{Z}}$ est alors appelée *l'itinéraire de x* . Ceci permet de définir une application :

$$\begin{aligned} \Psi : X &\rightarrow \{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}} = \Sigma_m \\ x &\mapsto (\psi(f^n(x)))_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Ψ est telle que $\Psi \circ f = \sigma \circ \Psi$: en effet, appliquer un décalage à l'itinéraire de x revient à considérer l'itinéraire de $f(x)$. Ainsi, $\Psi(X)$ est une partie de Σ_m invariante par σ et Ψ réalise une semi-conjugaison de (X, f) vers $(\Psi(X), \sigma)$.

Une partition de l'espace X fournit donc directement une semi-conjugaison vers un sous-décalage. Cependant, un sous-décalage quelconque peut très bien avoir une dynamique et une structure très difficiles à décrire. Il est alors naturel de rechercher des partitions pour lesquelles le sous-décalage $\Psi(X)$ obtenu est de type fini. On se place pour ce faire dans le cadre des systèmes dynamiques topologiques, où l'espace X est muni d'une topologie et les applications d'évolution considérées sont des homéomorphismes.

Définition. Soit (X, f) un système dynamique. Une *partition de Markov* est un ensemble fini de parties $\mathcal{R}_i \subset X$, appellées rectangles, telles que pour tout i, j, k

1. $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset$ si $i \neq j$;
2. $X = \bigcup_i \overline{\mathcal{R}_i}$;
3. S'il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $f^m(\mathcal{R}_i) \cap \mathcal{R}_j \neq \emptyset$ et $f^n(\mathcal{R}_j) \cap \mathcal{R}_k \neq \emptyset$, alors $f^{m+n}(\mathcal{R}_i) \cap \mathcal{R}_k \neq \emptyset$.

C'est cette dernière condition qui est centrale et qui garantit que le sous-décalage associé à une partition de Markov est nécessairement de type fini. On peut la comprendre de la manière suivante. Prenons le cas où $m = n = 1$. $f(\mathcal{R}_i) \cap \mathcal{R}_j \neq \emptyset$ est équivalent à l'existence d'un point $x \in \mathcal{R}_i$ tel que $f(x) \in \mathcal{R}_j$; c'est donc que la syllabe ij est autorisée dans un itinéraire d'un point de X . Similairement, le fait que $f(\mathcal{R}_j) \cap \mathcal{R}_k \neq \emptyset$ signifie que la syllabe jk est autorisée.

Dans le cas d'un SFT, on peut alors placer ces deux syllabes à la suite, de sorte que ijk soit un sous-mot autorisé pour un itinéraire dans X . Or ceci indique bien que l'on peut passer de i à k en appliquant deux fois le décalage, ce qui se traduit dans X par $f^2(\mathcal{R}_i) \cap \mathcal{R}_k \neq \emptyset$.

Il existe une certaine classe de systèmes dynamiques pour laquelle la notion de partition de Markov est particulièrement adaptée et où l'on dispose de méthodes de construction de telles partitions : ce sont les systèmes dynamiques hyperboliques.

5 Systèmes dynamiques hyperboliques

L'hyperbolicité, de manière générale, désigne l'existence de deux directions supplémentaires l'une de l'autre, l'une *dilatante* et l'autre *contractante*.

Par exemple, une matrice est dite hyperbolique si elle n'a aucune valeur propre de module 1, à la manière de la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pour cet exemple, l'action de A sur le plan \mathbb{R}^2 est telle que la direction horizontale est dilatée tandis que la direction verticale est contractée, de sorte qu'un point en dehors des axes aura une trajectoire en forme d'hyperbole.

Pour définir les systèmes dynamiques hyperboliques de manière précise, on se place dans le cadre différentiel, où pour espace X on prend M une variété¹⁴ de classe (au moins) C^1 et pour application f un C^1 -difféomorphisme.

Définition. Soit M une variété riemannienne et $f : M \rightarrow M$ un C^1 -difféomorphisme. Une partie $\Lambda \subset M$ compacte et f -invariante est dite *hyperbolique* s'il existe λ tel que $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ et des familles de sous-espaces $E^s(x) \subset T_x M$ et $E^u(x) \subset T_x M$ tels que pour tout $x \in \Lambda$:

1. $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$;
2. $Df(x)(E^s(x)) = E^s(f(x))$ et $Df(x)(E^u(x)) = E^u(f(x))$;
3. $\|Df^n(x)(v^s)\| \leq C\lambda^n \|v^s\|$, $\forall v^s \in E^s(x), \forall n \geq 0$;
4. $\|Df^n(x)(v^u)\| \geq C\frac{1}{\lambda^n} \|v^u\|$, $\forall v^u \in E^u(x), \forall n \geq 0$.

En tout point x de Λ , la différentielle $Df(x)$ agit donc sur $T_x M$ en contractant selon $E^s(x)$ (s pour *stable*) et en dilatant selon $E^u(x)$ (u pour *unstable*).

Dans le cas de la matrice A définie ci-dessus, $\{0\}$ est un ensemble hyperbolique, avec comme sous-espaces stable et instable respectivement l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses.

Un difféomorphisme f tel que M tout entière soit un ensemble hyperbolique est appelé un *difféomorphisme Anosov*. Une classe très importante de difféomorphismes Anosov, les automorphismes hyperboliques du tore, sera présentée et étudiée dans la section 5.2.

5.1 Stabilité structurelle

Ce qui fait des systèmes hyperboliques et en particulier des difféomorphismes Anosov une classe particulièrement importante de systèmes dynamiques différentiels, ce sont leurs propriétés de stabilité.

14. En réalité, on a ici besoin d'une structure supplémentaire, celle de *variété riemannienne*. On ne s'étendra pas sur le sujet, mais il suffit de dire que cela permet de munir chaque plan tangent $T_x M$ d'un produit scalaire et donc d'une norme, et ce avec une régularité satisfaisante.

Définition. Un C^1 -difféomorphisme d'une variété M est dit *structurellement stable* s'il existe \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}(M)$ (l'espace des difféomorphismes de M dans M)¹⁵ tel que si g appartient à \mathcal{U} alors f et g sont topologiquement conjugués, i.e. il existe $h : M \rightarrow M$ homéomorphisme tel que $h \circ f = g \circ h$.

Cette propriété est particulièrement intéressante, car elle assure que la dynamique de l'application f n'est pas « isolée », dans le sens qu'il existe un ouvert de difféomorphismes autour de f qui ont une dynamique très semblable. Cela fait des difféomorphismes structurellement stables des exemples de choix à étudier ; or on a le théorème suivant.

Théorème. (Anosov, 1962) Si f est un difféomorphisme Anosov d'une variété compacte M , alors f est structurellement stable.

Plus précisément, il existe un voisinage \mathcal{U} de Id_M dans $\text{Hom}(M)$, un voisinage \mathcal{V} de f dans $\text{Diff}(M)$ et une application continue $g \mapsto h(g)$ de \mathcal{V} dans \mathcal{U} telle que pour tout g dans \mathcal{V} , $h = h(g)$ est l'unique solution dans \mathcal{U} de $h \circ f = g \circ h$.

On trouvera une preuve de ce résultat dans l'annexe par J. Mather de *Differentiable dynamical systems* [Sma67]. L'idée est d'utiliser les majorations à décroissance géométrique données par l'hyperbolicité pour obtenir une série absolument convergente et en déduire qu'une certaine application est inversible (comme on le fait pour $A - \text{In}$ dans le cas d'une matrice A de norme strictement inférieure à 1), puis utiliser cela pour appliquer astucieusement le théorème des fonctions implicites.

Chaque représentant des difféomorphismes Anosov est ainsi de dynamique relativement compliquée, mais l'étude d'un cas particulier permet d'en déduire des propriétés sur tout un ouvert de difféomorphismes.

5.2 Automorphismes hyperboliques du tore

On va s'intéresser désormais à une classe représentative des difféomorphismes Anosov.

On considère une matrice B dans $Sl_n(\mathbb{Z})$, i.e. une matrice à coefficients entiers de déterminant 1. B agit linéairement sur \mathbb{R}^n et cette action préserve le réseau \mathbb{Z}^n : si x est un point à coordonnées entières, alors Bx l'est également. Ceci implique que l'application B passe au quotient en une application $\bar{B} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, où $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n . \bar{B} est alors un automorphisme du groupe quotient \mathbb{T}^n . Si de plus toutes les valeurs propres de B sont de module distinct de 1, alors \bar{B} est un automorphisme hyperbolique.

5.2.1 Monodromie du nœud de huit

A la fois monodromie du nœud de huit et exemple fondamental d'automorphisme hyperbolique du tore, on étudie ici la dynamique associée à la matrice

$$M_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Ceci nécessite de munir $\text{Diff}(M)$ d'une topologie adaptée. Dans le cas d'application C^k , on dit qu'une suite (f_n) converge si les fonctions et toutes leurs dérivées d'ordre inférieur à k convergent uniformément sur tout compact de M . Si M est compacte, la norme $\|f\| = \sum_0^k \|D^i(f)\|_\infty$ convient.

C'est un élément de $Sl_2(\mathbb{Z})$, de valeurs propres $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\lambda} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. On a $\lambda > 1$, donc M_8 induit un automorphisme hyperbolique du tore, noté f .

Des vecteurs propres associés sont $v_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ et $v_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, qui forment une base orthogonale de \mathbb{R}^2 . M_8 agit sur $\text{Vect}(v_1)$ comme une homothétie de rapport $\lambda > 1$, et sur $\text{Vect}(v_2)$ comme une homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda} < 1$. Ce sont donc bien deux directions supplémentaires, respectivement dilatante et contractante.

En tout point x du tore, le plan tangent est \mathbb{R}^2 et se décompose ainsi en une somme directe des droites $\text{Vect}(v_1)$ et $\text{Vect}(v_2)$ qui sont toutes deux stables par $Df_x = M_8$, de sorte que f est bien un difféomorphisme Anosov sur le tore.

De plus, les droites de \mathbb{R}^2 parallèles à v_1 se projettent sur le tore en une famille W^u de droites qui partitionnent \mathbb{T}^2 . La droite passant par le point x est appelée la *variété instable* en x , notée $W^u(x)$. Celle-ci est telle que $f(W^u(x)) = W^u(f(x))$. De même, les droites parallèles à v_2 se projettent en une famille W^s de droites sur \mathbb{T}^2 , et la droite $W^s(x)$ passant par x est la *variété stable* en x .

Ceci est le point de départ de la construction d'une partition de Markov associée à un système hyperbolique, que l'on évoquait en 4.3. Une fois les droites stables et instables connues en tout point, il s'agit de les "étirer" jusqu'à obtenir un découpage du domaine considéré en divers rectangles, qui forment alors une partition de Markov pour le système.

Dans notre cas, on considère le domaine fondamental du tore, i.e. le carré $[0, 1]^2$. On trace des droites parallèles à v_1 et v_2 en partant des coins du carré, de sorte à obtenir un découpage en 5 zones polygonales du domaine, à partir des rectangles A et B .

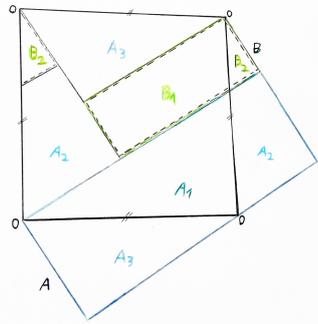


FIGURE 15 – Construction de la partition de Markov associée à f

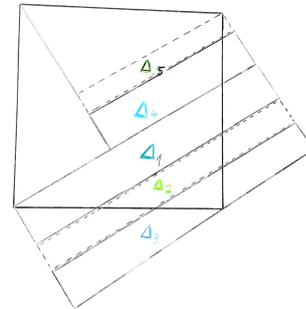


FIGURE 16 – Application de f à la partition

Pour en déduire le sous-décalage associé, on subdivise A et B en les composantes de l'intersection entre $\overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{B}$ et $f(\overset{\circ}{A})$ et $f(\overset{\circ}{B})$, notés Δ_i pour $1 \leq i \leq 5$, qui sont les « rectangles » de la partition. Dès lors, on peut construire la matrice d'adjacence correspondant au SFT obtenu, en posant $a_{i,j} = 1$ si $f(\Delta_i) \cap \Delta_j$ est d'intérieur non vide, et $a_{i,j} = 0$ sinon. On obtient la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

grâce à laquelle il est possible d'étudier plus simplement la dynamique de f .

Conclusion

L'étude qui précède fournit alors les outils permettant d'utiliser conjointement cette partition de Markov et la suspension de l'application M_8 pour obtenir ce que l'on appelle un *gabarit de la dynamique de la monodromie du nœud de huit*. L'idée est de "contracter" chacun des rectangles Δ_i pour en faire chacun une ligne et de suivre la trajectoire de chacune de ces lignes dans l'espace selon le flot de suspension de M_8 . Ce mouvement forme alors des rubans dans l'espace, qui reviennent se connecter aux rubans correspondant à l'image du rectangle initial.

Cette méthode, qui utilise tous les outils que nous avons mis en place ici, fournit une représentation visuelle de la dynamique de f et représente la principale application du travail de Birman et Williams dans leur article *Knotted periodic orbits in dynamical systems* [BW83]. L'objectif initial de ce stage était de réaliser par moi-même un tel dessin, pour illustrer mon étude conjointe des nœuds et des systèmes dynamiques. Ceci n'ayant pas été possible, voici en guise de conclusion le dessin original réalisé par Birman et Williams.

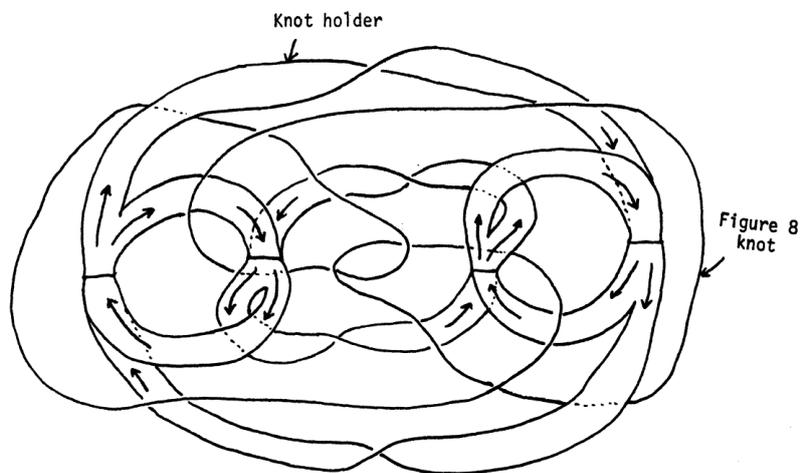


FIGURE 17 – Gabarit pour la monodromie du nœud de huit (Source : [BW83])

Remerciements

Pour terminer, j'aimerais remercier Pierre Dehornoy de m'avoir accompagné à la fois humainement et mathématiquement avec autant de sympathie et de bienveillance. Merci d'avoir eu la patience de consacrer autant de temps à répondre à mes innombrables interrogations.

Merci également à la talentueuse Mai-Linh Tran Cong pour la somptueuse illustration du nœud de huit en couverture. Enfin, merci à Paul-Swann Puel pour sa présence et son soutien tout au long de ce stage.

Bibliographie

- [BS02] Michael BRIN et Garrett STUCK. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press, 2002 (cf. p. 3).
- [BW83] Joan S. BIRMAN et R. F. WILLIAMS. « Knotted periodic orbits in dynamical systems. II. Knot holders for fibered knots ». In : *Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981)*. T. 20. Contemp. Math. AMS, 1983, p. 1-60 (cf. p. 3, 24).
- [Deh11] Pierre DEHORNOY. « Les noeuds de Lorenz ». In : *L'Enseignement Mathématique* 57.3 (2011), p. 211-280 (cf. p. 13).
- [Deh15] Pierre DEHORNOY. « On the zeroes of the Alexander polynomial of a Lorenz knot ». In : *Annales de l'Institut Fourier*. T. 65. 2. 2015, p. 509-548 (cf. p. 13).
- [Etn04] John B ETNYRE. « Lectures on open book decompositions and contact structures ». In : *arXiv preprint math/0409402* (2004) (cf. p. 3).
- [FM11] Benson FARB et Dan MARGALIT. *A primer on mapping class groups*. Princeton university press, 2011 (cf. p. 13).
- [Fra87] George K FRANCIS. *A topological picturebook*. Springer, 1987 (cf. p. 3).
- [GL06] Etienne GHYS et Jos LEYS. *Lorenz and modular flows : a visual introduction*. 2006. URL : http://www.josleys.com/articles/ams_article/Lorenz3.htm (visité le 20/05/2022) (cf. p. 16).
- [Mil68] John MILNOR. « Singular points of complex hypersurfaces ». In : *Ann of Math. Stud* (1968), p. 591-648 (cf. p. 16).
- [Mur96] Kunio MURASUGI. *Knot theory and its applications*. Springer, 1996 (cf. p. 3).
- [Rol03] Dale ROLFSEN. *Knots and links*. T. 346. American Mathematical Soc., 2003 (cf. p. 3, 15, 16).
- [Sma67] Stephen SMALE. « Differentiable dynamical systems ». In : *Bulletin of the American mathematical Society* 73.6 (1967), p. 747-817 (cf. p. 22).
- [Thu97] William P. THURSTON. *Three-dimensional geometry and topology*. Edited by Silvio Levy. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997 (cf. p. 3).
- [Wik] WIKIPEDIA. *Figure-eight knot (mathematics)*. URL : [https://en.wikipedia.org/wiki/Figure-eight_knot_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Figure-eight_knot_(mathematics)) (visité le 10/05/2022) (cf. p. 17).