Exercice 1. *Déterminer les extrema globaux de $f|_A$ pour les fonctions suivantes:*

1. $f(x,y) = xy(x-y)^2, \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$,
2. $f(x,y) = xy(x-y)^2, \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$,
3. $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x, \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$,
4. $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3, \qquad A = \mathbb{R}^2$,
5. $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3, \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Exercice 2. *On considère un carré (l'intérieur inclus) A dans le plan de sommets $\{(-1,0),(1,0),(1,-2),(-1,-2)\}$. Trouver les extrema globaux de la fonction $f(x,y) = 2x - y^2$ définie sur B, où B est donné par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\} \cap A$.*

Exercice 3. *Trouver le point de la courbe $y^2 = 4x$ dont la distance vers $(1,0)$ est minimale:*

1. *par la méthode des multiplicateurs de Lagrange,*
2. *en réduisant le problème à l'étude d'une fonction d'une variable.*

Exercice 4. *Trouver les maxima et les minima de $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ à l'intérieur du cercle unitaire et sur la frontière.*

Exercice 5. *Trouver les maxima et les minima de $f(x,y) = y + x - 2xy$ à l'intérieur et sur la frontière de $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq \frac{1}{2}\right\}$.*

Exercice 6. *Trouver les extrema de f sous contraintes:*

1. $f(x,y,z) = x - y + z, \qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$,
2. $f(x,y) = \sin(xy), \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\}$,
3. $f(x,y) = xy, \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1\right\}$,
4. $f(x,y,z) = x + y + z, \qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\}$.

Exercice 7. *Résoudre les problèmes suivants par la méthode des multiplicateurs de Lagrange:*

1. *Trouver la distance la plus courte du point $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$ au plan $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, où $(b_1,b_2,b_3) \neq (0,0,0)$.*
2. *Trouver le point sur la droite $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ et $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ qui soit le plus proche de l'origine.*
3. *Montrer que le volume du plus grand parallélépipède rectangle qui puisse être inscrit dans l'ellpisoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est $8abc/3\sqrt{3}$, avec $0 < c < b < a$.

Exercice 8. *Trouver la distance minimale entre la courbe $y = x^2$ et la droite $x - y - 2 = 0$.*

Exercice 9. *Trouver le point de la surface $z = xy - 1$ le plus proche à l'origine.*

Exercice 10. *Soient A, B, C trois angles positifs tels que $A + B + C = \pi/2$. Montrer que*

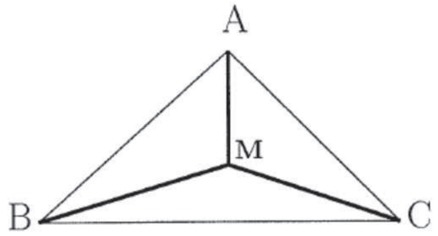
$$\sin(A)\sin(B)\sin(C) \leq \frac{1}{8}.$$

Exercice 11. *Un récipient de forme cylindrique doit avoir le volume d'un litre. De quelle façon faut-il le concevoir pour minimiser le matériel employé?*

Exercice 12. *Trouver les point les plus éloignés et les plus proches du point $(0,0,2)$ sur la sphère*

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1.$$

(**P**) $\left\{\begin{array}{l}\textit{Trouver le minimum du produit des distances aux côtés}\\ \textit{d'un triangle } ABC \textit{ d'un point } M \textit{ intérieur au triangle.}\end{array}\right.$



Désignons par a, b et c les longueurs des côtés du triangle et par S, u, v et w (avec $S = u + v + w$), les aires des triangles ABC, MBC, MCA et MAB.

(a) Montrer que le problème (**P**) se traduit par la recherche du maximum de la fonction
$$f(u, v, w) = \frac{8uvw}{abc}$$
sous la contrainte $S = u + v + w$.

(b) En appliquant le multiplicateur de Lagrange montrer que $M = G$ le centre de gravité du triangle ABC pour lequel f atteint son maximum égal à $\frac{8S^3}{27abc}$.

****

Trouver les points les plus proches et les plus éloignés de l'origine de la courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$

****

Exercice 6. Inégalité de Hadamard. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel. On note $f(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée des vecteurs colonnes $v_1, \ldots, v_n$. (1) Montrer que le maximum de f sur l'ensemble X défini par $\|v_1\| = \ldots = \|v_n\| = 1$ est atteint, et qu'il est strictement positif. (2) Montrer par le théorème des extrema liés que, si le maximum de f est atteint en $(v_1, \ldots, v_n)$, les v_i forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. (3) En déduire l'inégalité de Hadamard : $|\det(v_1, ..., v_n)| \leq \|v_1\| \times \ldots \times \|v_n\|$ valable pour toute famille $(v_1, \ldots, v_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Quand a-t-on égalité ?

****

On note $S = \{x \in R^n | \| x \| = 1\}$ la sphère unité de R^n. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles continues telle que la restriction de f à S soit constante.

Montrer qu'il existe $a \in R^n$ tel que $\| a \| < 1$ et tel que $\text{grad}_f a = 0$.

****

Exercice 5 - Avec un sinus - *L2/Math Spé/Oral CCP* - ⋆⋆

On considère l'équation différentielle $x'(t) = x(t)\sin^2(x(t))$.

1. Quelles sont les fonctions constantes solution de cette équation ?
2. Soit x une solution maximale vérifiant $x(0) = x_0$. Montrer que x est bornée, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, monotone.
3. Montrer que x admet des limites en $\pm\infty$. Les déterminer.

****