Feuille 9. L3B. Calcul diiférentiel

Exercice 1 :

On considère la fonction de deux variables $u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2xy}$.

a) quel est le domaine de définition de cette fonction?

b) montrer que la surface associée à cette fonction est constitué de 4 nappes régulières entrelacées qui s'appuient sur l'axe des z, que chacune de ces nappes est engendrée par une demi-droite mobile perpendiculaire à l'axe des z.

Exercice 2 :

Déterminer et représenter graphiquement le dommaine de définition des fonctions suivantes :

$$\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right), \qquad \sqrt{1-(x-y)^2} \qquad \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}, \qquad \ln\left(\frac{y}{x^2+y^2-1}\right).$$

Exercice 3 :

Déterminer les courbes de niveaux des fonctions suivantes :

$$u(x,y) = x^5 - 5y^2, \qquad u(x,y) = x^2 + x + y^2, \qquad u(x,y) = x\cos(y).$$

Exercice 4 :

On considère la fonction $u(x,y) = 4y^2 - 2y + 4x^2 + x$

a) Calculer $u(-1,1)$.

b) Déterminer l'équation de la courbe de niveau $u = 5$.

c) Déterminer le lieu des points $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u(x,y) \leq 2$.

Exercice 5 :

Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles x et y .

a) Donner la définition de la continuité de u en un point $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

b) Soit $a_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ une suite convergeant vers $M_0 \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si u est continue en M_0, alors la suite réelle $u(a_n) = u(x_n, y_n)$ converge vers $u(M_0)$.

c) Réciproquement montrer que si u n'est pas continue en M_0, alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers M_0 telle que la suite $u(a_n)$ ne converge pas vers $u(M_0)$.

d) En déduire la caractérisation séquentielle de la continuité : "Une fonction $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $M_0 \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers M_0 la suite $u(a_n)$ converge vers $u(M_0)$ ".

Exercice 6 :

Déterminer le domaine de définition et étudier la continuité des fonctions suivantes:

$$u(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \quad u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad u(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 7

On considère la fonction f définie par par

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est différentiable.

b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les comparer.

Exercice 8

Soit $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

Montrer que la fonction $g(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ est continue (indication: utiliser la formule de Taylor).

Exercice 9

Soit $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $a < b$ deux nombres réels. On définit la fonction $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dy$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$.

Exercice 10

Le but est de trouver toutes les fonctions $f(t,x)$ de classe C^2 telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$. Soit f une solution de l'équation. On définit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(u,v) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$.

a) Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$.
b) En déduire la forme de f.
c) Vérifier que toute fonction f de la forme précédente est bien solution de l'équation.

Exercice 11

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definie par $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. A toute fonction $f(x,y)$ de classe C^2, on associe la fonction $F = f \circ g$.

a) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de F.

b) Application: trouver toutes les fonctions ϕ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telles que la fonction $f(x,y) = \phi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Remarque: la fonction $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ s'appelle le laplacien de f. Une fontion f telle que $\Delta f = 0$ est dite harmonique.

Exercice 12

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite convexe si et seulement si pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Montrer qu'une fonction $f(x_1, x_2)$ de classe C^2 est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}^2$ et tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d^2 f_a(h) \quad = \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_2^2 \geq 0$$

Indication: considérer les fonctions d'une variable $g_{a,h}(t) = f(a+th)$ et calculer $g''_{a,h}$ en fonction de $d^2 f_a(h)$ (On rappelle qu'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est convexe si et seulement si $g'' \geq 0$).