Feuille d'exercice 8. L3B Calcul différentiel. Université J.Fourier.

Exercice 1

Prélude : si f est une fonction d'une variable réelle x sur $[a,b]$, régulière partout sauf en $x_0 \in]a,b[$ où elle y est discontinue, alors son graphe ne peut être tracé sans lever le crayon. Représenter graphiquement la fonction partie entière de x pour x réel pour vous en convaincre. Si maintenant f est dérivable en x_0, montrer que son graphe admet une tangente en ce point. Montrer que $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

Exercice : Montrer que si la fonction $(x,y) \to f(x,y)$ admet une dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0), alors la courbe plane obtenue comme l'intersection de la surface associée à $z = f(x,y)$ et du plan parallèle à xOz qui passe par $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ admet une tangente.

Représenter graphiquement la surface associée à $z = f_1(x,y) = x^2$, puis la surface associée à $z = f_2(x,y) = y^2$, et enfin celle associée à $z = f(x,y) = \min(x^2, y^2)$.

Montrer que la fonction f n'est pas différentiable en (x_0, x_0) si $x_0 \neq 0$.

Montrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.

Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

Montrer que la fonction f n'admet pas de dérivées partielles dans un voisinage de $(0,0)$.

Montrer que la réciproque du théorème : *"Si f admet dans un voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles et que ces dérivées partielles sont continues en (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0)"* est fausse.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est continue, si elle admet des dérivées partielles, si elle est différentiable, si elle admet des dérives partielles continues

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

c) $f(x,y) = \dfrac{y^3}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Exercice 3

On considère l'application f qui à toute matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe son déterminant (le déterminant de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $ad - bc$). En considérant $X = (x_{ij})$ comme un élément de $\mathbb{R}^{2^2}$, calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}$ et en déduire que f est différentiable en tout point X de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Trouver une expression matricielle pour la différentielle. Quelles sont les points X pour lesquels la différentielle s'annule ?

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2 + y - x^3 + x^2$. Posons $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 0\}$.

1) Montrer qu'en tout point de C la tangente à C est définie.

2) Quels sont les points où la tangente à C est parallèle à $0y$, parallèle àOx ?

3) Montrer que la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

4) Tracer C.

Exercice 5

Soit S la surface définie par la fonction $f(x,y) = x - 2(x^2+y^2)^2$.

1) Trouver les points où le plan tangent à S est horizontal.

2) Montrer qu'en tout point $(a,b,c) \in S$ la surface S est en dessous de son plan tangent. Indication : On pourra étudier le signe de

$$q(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\,hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,k^2.$$