Calcul différentiel (L3): équations différentielles non linéaires

Deuxième Semestre 2012-2013

Exercise 1. *On se propose de déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que si f n'est pas identiquement nulle alors $f(0) = 1$. On suppose désormais que ceci est vérifié. Démontrer que dans ce cas-là, f est aussi paire.

(ii) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int_0^\varepsilon f(s)ds \neq 0$.

(iii) En déduire que $f(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s)ds / (2\int_0^\varepsilon f(s)ds)$, et que f est C^∞.

(iv) Montrer que $f'(x+y) = f'(x)f(y) + f(x)f'(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En déduire une équation différentielle vérifié par f. Obtenir f.

Exercise 2. *Soit*

$$E : y' = x^2 + y^2$$

a) Justifier l'existence d'une unique solution maximale y de E vérifiant $y(0) = 0$.
b) Montrer que y est une fonction impaire.
c) Etudier la monotonie et la concavité de y.
d)Montrer que y est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
e) Dresser le tableau de variation de y.

Exercise 3. *On étudie l'équation diffrentielle*

$$(E) : y' = x^3 + y^3$$

Soit y une solution maximale de l'quation diffrentielle (E) dfinie en 0 et vrifiant $y(0) > 0$.
a) Justifier que y est définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$.
b) Montrer que y est croissante sur $[0, \beta[$.
c) Etablir que β est réel.
d) Déterminer la limite de y en β^-.

Exercise 4. *a) Montrer que le problème de Cauchy $\left\{ y' = \frac{1}{1+xy}, \quad y(0) = 0 \right\}$ possède une solution maximale unique.*
b) Montrer que celle-ci est impaire et strictement croissante.
c) Etablir enfin qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.
d) Dterminer la limite en $+\infty$ de cette solution.
e) On note φ la bijection réciproque de cette solution. Exprimer φ à l'aide d'une intégrale en formant une équation différentielle vérifiée par cette fonction.

Exercise 5. *On considère l'équation*

$$E : y' = x + y^2$$

a) Quel est le lieu des points où les solutions de (E) présentent une tangente horizontale ?
b) Décrire le lieu des points d'inflexion ?

Exercise 6. *Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation*

$$yy' = x$$

Exercise 7. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'équation différentielle*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

est appellée équation de Bernoulli. *Elle est linéaire si $n = 0$ ou $n = 1$. Montrer que on peut réduire cette équation différentielle à une équation différentielle linéaire pour tous $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ en employant le changement de variable $z = y^{1-n}$. Trouver les solutions des équations suivantes:*

(a) $xy' + y = x^4y^3$,

(b) $xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$,

(c) $xy' - 3y = x^4$.

Exercise 8. *Soient $p, q \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle*

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0$$

est appellée équation d'Euler.

(i) Montrer que le changement de variable $x = e^t$ donne une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

(ii) Utiliser le point (i) pour trouver les solutions des équations différentielles suivantes (sur $\mathbb{R}_{>0}$):

(a) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$,

(b) $x^2y'' - xy' + y = 2x$.

Exercise 9 (Sur le lemme de Grönwall). *(i) (Version différentielle) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$. Soient $u \in \mathrm{C}(I, \mathbb{R})$ et $y \in \mathrm{C}^1(I, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $t \in I$, on a $y'(t) \leq u(t)y(t)$. Montrer que*

$$y(t) \leq y(a)\exp\left(\int_a^t u(x)dx\right),$$

pour tout $t \in I$.

(ii) (Version intégrale I) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$. Soient $u, y \in \mathrm{C}(I, \mathbb{R})$, et $C \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $t \in I$, on a $y(t) \leq C + \int_a^t u(x)y(x)dx$ et $u(t) \geq 0$. Montrer que

$$y(t) \leq C\exp\left(\int_a^t u(x)dx\right),$$

pour tout $t \in I$.

(iii) (Version intégrale II) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$. Soient $\alpha, u, y \in \mathrm{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $t \in I$, on a $y(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t u(x)y(x)dx$ et $u(t) \geq 0$. Montrer que

$$y(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \left(\alpha(x)u(x)\exp\left(\int_x^t u(s)ds\right)\right)dx,$$

pour tout $t \in I$.

(iv) (Application I) Soit $y \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$ tel que, pour tout $t \geq 0$, on a $|y(t)| \leq \int_0^t xy(x)dx$. Montrer que $y \equiv 0$.

(v) (Application II) Soit $q \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$ croissante, et soit y une solution maximale de $y'' + qy = 0$. Montrer que y est définie et bornée sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Exercise 10. *Soit $c > 0$. On s'intéresse au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) &= \sqrt{|y(t)|} + c, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

On admet qu'il existe une solution maximale $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ à ce problème (pourquoi ?).

(i) Montrer que y est strictement croissante. En déduire que y est une bijection de (a, b) sur son image.

(ii) Montrer que, pour tout $t \in (a, b)$, on a $|y(t)| \geq t^2/4$.

(iii) En déduire que $y \in \mathrm{C}^1((a, b), \mathbb{R})$ est un difféomorphisme. On note $z : \mathbb{R} \to (a, b)$ la fonction réciproque de y.

(iv) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $z'(t) = 1/(c + \sqrt{|t|})$.

(v) *En déduire que z et y sont des fonctions impaires et donner une expression explicite pour z. En déduire aussi que $(a,b)=\mathbb{R}$.*

Exercise 11. (i) *Soit $a>0$. Soient $u,v\in \mathrm{C}([t_0,t_0+a],\mathbb{R}_{\geq 0})$ et $C\in\mathbb{R}$. Suppusons que*

$$u(t)\leq C+\int_{t_0}^{t} u(x)v(x)dx,$$

pour tout $t\in[t_0,t_0+a]$. Montrer que

$$u(t)\leq C\mathrm{exp}\left(\int_{t_0}^{t} v(x)dx\right),$$

pour tout $t\in[t_0,t_0+a]$.

(ii) *Soit $\varepsilon:\mathbb{R}_{\geq 0}\to M_n(\mathbb{C})$ continue telle que $\int_0^{+\infty}\|\varepsilon(s)\|ds$ converge. Montrer que les solutions $x:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}^n$ de $y'(t)=\varepsilon(t)y(t)$ sont bornées et admettent une limite en $+\infty$.*

(iii) *Soit A une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de parties réelles nulles. Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^n$ une solution de l'équation $y'(t)=(A+\varepsilon(t))y(t)$. Montrer que $t\mapsto \exp(-tA)y(t)$ admet une limite en $+\infty$ (dans $\mathbb{C}^n$).*

(iv) *Soit $q:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty}|q(s)|ds$ converge et soit $y:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ une solution de l'équation $y''(t)+(1+q(t))y(t)=0$. Démontrer l'existence de $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que*

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)-\alpha\cos(t)-\beta\sin(t)=0.$$