Exercice 1.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x) \qquad (E)$$

où $p,\ q,\ f\ : I \to \mathbb{R}$ sont trois fonctions continues.

1. Soient $p,q\ : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $x_0 \in I$. Alors pour tout couple α et β dans $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe une et une seule solution de l'équation homogène

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$$

qui satisfait simultanément les deux conditions initiales $y(x_0)=\alpha$ et $y'(x_0)=\beta$.

2. Soient $u,v\ : \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors définissons la fonction $\omega[u,v]\ :\ I \to \mathbb{R}$ par $\omega[u,v](x)=u(x)v'(x)-u'(x)v(x)$. Démontrer que si $x_0 \in I$ et $y_1,y_2\ :\ I \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de l'équation homogène alors

a) $\forall x \in I\ :\ \omega[y_1,y_2](x)=\omega[y_1y_2](x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$ (quel est le lien entre le wronskien définit dans votre cours et ce résultat),

b) ou bien $\omega[y_1,y_2]$ est toujours nul sur I ou bien il ne s'annule jamais sur I,

c) les deux fonctions y_1,y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si $\omega[y_1,y_2](x_0)\neq 0$.

3. Si l'on connait une solution de l'équation homogène mettons $x \to y_1(x)$ définie sur I, montrer que l'on peut en trouver une seconde en posant $y(x)=y_1(x).z(x)$ où z est une fonction inconnue que l'on peut découvrir en résolvant une équation du premier ordre. Traiter par exemple l'équation $x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=0$ avec $I=]-\infty,0[$ ou $I=]0,\infty[$, en remarquent que $y_1(x)=x$ convient.

4. Soient $y_1,y_2\ :\ I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène et $x_0 \in I$. Montrer que la fonction $y_0\ :\ I \to \mathbb{R}$ définie par $y_0(x)=-y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{f(t)y_2(t)}{\omega[y_1,y_2](t)}dt+y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{f(t)y_1(t)}{\omega[y_1,y_2](t)}dt$ est une solution particulière de l'équation (E).

****

Exercice2.
Soit q une fonction continue, intégrable sur $[0,+\infty[$. Soit (E) l'équation différentielle

$$y''+qy=0\ .$$

a) Si f est une solution bornée de (E) sur $[0,+\infty[$, montrer que sa dérivée f' converge en $+\infty$. Quelle est la valeur de cette limite ?

b) Soient f et g deux solutions bornées. Étudier $\omega[f,g]=f'.g-f.g'$. En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

****

Exercice 3.
On considère l'équation différentielle E_0

$$y''-e^xy=0\ .$$

1. Soit y une solution de E_0 sur $\mathbb{R}$. Étudier la convexité de y^2. En déduire que si $y(0)=y(1)=0$ alors y est nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 telles que

$$(y_1(0),y_1'(0))=(0,1) \text{ et } (y_2(1),y_2'(1))=(0,1)\ .$$

Démontrer que (y_1,y_2) est un système fondamental de solutions de E_0.

3. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Démontrer que l'équation différentielle $E\ :\ y''-e^xy=f(x)$ admet une unique solution telle que $y(0)=y(1)=0$.

****

Exercice 4.
On considère l'équation différentielle (E) :

$$y''+\cos^2(t).y=0$$

1. Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0)=1$ et $u'(0)=0$.

2. Démontrer l'existence de deux réels α et β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta \ , \ u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0 \ .$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max\{t < 0/u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min\{t > 0/u(t) = 0\} \ .$$

4. Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u. En étudiant les variations de $w = uv' - u'v$ montrer que v possède au moins un zéro dans $]\gamma, \delta[$.
5. Soit w une solution non nulle de (E). Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to w(t - n\pi) \ .$$

****

Exercice 5.

Soit $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que $f'(x) + f(x) \to_{x\to\infty} l$. Montrer que $f(x) \to_{x\to\infty} l$ (Indication possible : en posant $u = f' + f$ et au moyen de la méthode de variation de la constante, résoudre $y' + y = u$ et trouver ainsi une expression intégrale de f en fonction de u.

****

Exercice 6.

Soit $\varphi \ : \ [0,1] \to [0,1]$ continue non identique à 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. On va montrer qu'il existe une unique $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ solution de l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)) \ .$$

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ munit de $\|\|_\infty$ et $T \ : \ E \to E$ défini par $T(f) = g$ où

$$g(x) = \alpha + \int_0^1 f(\varphi(t))dt \ .$$

Montrer que T^2 est contractante. Conclure.

****

Exercice 7.

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ munit de $\|\|_\infty$. On définit pour toute f de E, $T(f)$ par

$$T(f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^x uf(u)du \right) dx \ .$$

Montrer que T est contractante. En déduire que l'équation différentielle $f''(t) - tf(t) = 0$ admet une unique solution f telle que $f'(0) = f(0) = 0$, la fonction nulle.

****

Exercice 8.

Trouver deux fonctions y_1 et y_2 linéairement indépendantes définies sur $\mathbb{R}$ solutions de

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

et montrer que $\omega[y_1, y_2] = y_1y_2' - y_1'y_2$ s'annule en 0. Pourquoi ce fait ne contredit-il pas la condition nécessaire d'indépendance linéaire d'un système de solutions d'une équation linéaire homogène (voir exercice 1 question 2c) ?