Exercice 1

Montrer que la relation $y^3 + \left(x^2+1\right) y + x^4 = 0$ définit implicitement y en fonction de x sur $\mathbb{R}$, et que la fonction $\phi : x \mapsto y$ ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $f(x,y) = y^3 - 2y^2 + y - x^2 y$.

a) Quels sont les points où $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$?

b) Trouvez les lignes de niveaux qui passent par ces points.

c) Dire pour chacun des ces points s'il s'agit d'un maximum local (pour f), d'un minimum local, d'un point col, ou un point d'un autre type.

d) Pourquoi les lignes de niveaux qui ne passent par par un des points précédents sont-elles régulières ?

e) Dessiner les lignes de niveaux de f.

Exercice 3

Soit $f(x,y) = 2 + (x-y)^2 + (x-1)^3$.

a) Quel est le point A où $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$?

b) Tracer les lignes de niveau qui passent par A (étudier $y_1 = x - (1-x)^{3/2}$ et $y_2 = x + (1-x)^{3/2}$ pour $x \leq 1$).

c) Le point A est-il un maximum local, un minimum local de f ?

d) Tracer les lignes de niveaux de f.

Exercice 4

Soit $f(x,y) = y^2 + y - x^3 + x^2$.

a) Quels sont les points A et B où $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$?

b) Quelles sont les lignes de niveaux qui passent par A et B ?

c) Dessiner les lignes de niveau de f.

On s'interesse maintenant à $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) = 0\right\}$.

d) Montrer que $E = (1,0)$ est un point de $\mathcal{C}$.

e) Montrer que dans un voisinage de E, il existe une fonction $y = \varphi(x)$ telle que $f(x, \varphi(x)) = 0$. Que vaut $\varphi(1)$?

f) Donner un développement limité de φ à l'ordre 4 autour de 1.