Exercice 1. Donner la solution générale de

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x(0) = x_0,\ y(0) = x_0,\ z(0) = z_0$$

pour les matrices A suivantes

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

****

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quel est le lien entre la matrice A et la résolution de

$$\frac{d^4x(t)}{dt} - x(t) = 0 \ ?$$

Montrer (ou en déduire) que $e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{\cosh t+\cos t}{2} & \frac{\sinh t-\sin t}{2} & \frac{\cosh t-\cos t}{2} & \frac{\sin t+\sinh t}{2} \\ \frac{\sin t+\sinh t}{2} & \frac{\cosh t+\cos t}{2} & \frac{\sinh t-\sin t}{2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ (compléter par permutation circulaire).

Donner la solution de $\frac{d^4x(t)}{dt} - x(t) = t + \sin t$ sachant que $\left(x(0), \frac{dx}{dt}(0), \frac{d^2x}{dt^2}(0), \frac{d^3x}{dt^3}(0)\right) = (a, b, c, d)$.

****

Exercice 3. Trouver les fonctions $y = y(x)$ définies sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ vérifiant

$$xy' + \left(2x^2 - 1\right)\cot y = 0 \qquad y(x_0) = y_0 \text{ pour } x_0 \neq 0 \text{ et } \cos y_0 \neq 0.$$

****

Exercice 4. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E) \qquad (x+1)^2 (xy' - y) = -(2x+1).$$

1) Déterminer l'ensemble des applications de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E) pour

a) $I =]0, +\infty[$, b) $I =]-1, 0[$ c) $I =]-\infty, -1[$ d) $I =]-1, +\infty[$ e) $I = \mathbb{R}$.

2) Indiquer l'allure du graphe

a) de la solution y_1 sur $I =]0, +\infty[$ telle que $y_1(1) = \frac{1}{2}$,

a) de la solution y_2 sur $I =]0, +\infty[$ telle que $y_2(1) = \frac{3}{2}$,

a) de la solution y_3 sur $I =]-1, 0[$ telle que $y_3\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

3) La fonction y définie par

$$y(x) = \begin{cases} y_3(x) & \text{sur }]-1, 0[\\ y_2(x) & \text{sur }]0, +\infty[\end{cases}$$

peut-elle se prolonger en une solution de (E) sur $]-1, +\infty[$?

4) Étant donné un point du plan $M_0(x_0, y_0)$, quel est (selon M_0) le nombre de courbes intégrales passant par M_0 ? (autrement dit le nombre de solutions y de (E) telles que $y(x_0) = y_0$).

5) Indiquez l'allure des courbes intégrales.

****

Exercice 5.

Déterminer l'ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \left(\cos^2 x + x^2\right).$$

****

Exercice 6.

Déterminer l'ensemble de fonctions de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ solutions de

$$\left(x^2 - 1\right) y'' + xy' - 4y = 0.$$

Indication : utiliser le changement de variable $x = \cos\theta$.