Feuille sur les courbes

Exo1 i)

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha^{(p-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha^{(p-1)} \end{pmatrix}$$

alors en projetant chaque vecteur $\alpha, \alpha' \dots \alpha^{(p-1)}$ sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on obtient des vecteurs qui verifient

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & & a_{p-1} \end{pmatrix} X \quad \text{par exemple } X_i = \begin{pmatrix} \langle e_i, \alpha \rangle \\ \langle e_i, \alpha' \rangle \\ \langle e_i, \alpha^{(p-1)} \rangle \end{pmatrix}$$

$((e_1, \dots, e_n)$ base cano de $\mathbb{R}^n)$

verifie $\frac{dX_i}{dt} = \begin{pmatrix} \text{Matrice compagnon} \end{pmatrix} X_i$ donc $X_i = Res(t_0, t)\, X_i(t_0)$

puis en regroupant tout $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \\ \alpha^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} = \text{Resolvante}(t_0, t) \begin{pmatrix} \alpha(t_0) \\ \\ \alpha^{(p-1)}(t_0) \end{pmatrix}$

et donc $\mathrm{Im}\, \alpha \subseteq E$ sous espace engendré par $(\alpha(t_0), \dots, \alpha^{(p-1)}(t_0))$

On peut contourner la démarche si dessus et par le théorème de la base incomplète on prend $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ dont les m derniers vecteurs forment une base de E avec $m = \dim E \leq p$. Les équations de E dans cette base (si on nomme le point courant $\overrightarrow{OM} = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$) sont donc $x_1 = \dots = x_{n-m} = 0$ Posons $\varphi(t) = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 \dots + \varphi_n f_n$

Alors les composantes φ_i $i = 1, \dots, n-m$ verifient $\varphi_i(t_0) = \dots = \varphi_i^{(p-1)}(t_0) = 0$

$$= \frac{1}{4a}\left(\operatorname{Argsh} 2ad - \operatorname{Argsh} 2ac + \operatorname{sh}\operatorname{Argsh} 2ad \operatorname{ch}\operatorname{Argsh} 2ad - \operatorname{sh}\operatorname{Argsh} 2ac \operatorname{ch}\operatorname{Argsh} 2ac \right)$$ ②

$$= \frac{1}{4a}\left(\operatorname{Argsh} 2ad - \operatorname{Argsh} 2ac + 2ad\sqrt{1+4a^2d^2} - 2ac\sqrt{1+4a^2c^2} \right)$$

(iii) il faut montrer que le segment de droite est le plus court chemin d'un point à un autre. On a démontré en cours que si $t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$ est une subdivision de $[a,b]$ et si $[a,b] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n$ est une immersion alors en posant $M_i = \alpha(t_i)$ et $S_m = \sum_{i=1}^{m} \|\overrightarrow{M_i M_{i-1}}\|$ alors $S_m \to l(a,b)$ qd le pas de la subdivision tend vers 0. Prenons d'abord la subdivision $t_0 = a < t_1 = b$ puis

$t_0 = a,\ t_1 = \frac{a+b}{2},\ t_2 = b$ puis

$t_0 = a \quad t_1 = a + \frac{b-a}{4}, \quad t_5 = b$ puis

$t_0 = a \quad t_1 = a + \frac{b-a}{2^k} \dots\dots t_{2^k+1} = b$

notation simplifiée

on RAFINE la subdivision d'avant

alors par l'inégalité triangulaire on a

notation à revoir

$$S_1 \leq S_2 \leq S_5 \leq \dots \leq S_{2^k+1} \to \text{qui tend vers } l(a,b)$$

donc $\|\alpha(b) - \alpha(a)\| = S_1 \leq \int_a^b \|\alpha'(u)\|\, du$

(iv) ? ? ?

(v) si $\|\alpha'\|=1$ alors $l(\alpha,a,b)=b-a$

(vi) changement de variable dans une integrale

(vii) Soit $f(u)=\sqrt{1+u^2}$ $f'(u)=\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

et $f''(u)=\dfrac{1}{(1+u^2)^{3/2}}$ Si $0<v<u$

alors $f(u)-f(v)=(u-v)f'(c)$ avec $c\in]v,u[$

Comme $f''>0$ alors $f'(c)>f'(v)=\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}$

d'où $\sqrt{1+u^2}-\sqrt{1+v^2}\geqslant\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}(u-v)$ si $0<v<u$

(viii) voir (iii) .../...

<u>Exo3</u> $s(t)=L(\alpha,t_0,t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(t)\|\,dt$

donc $\dfrac{ds}{dt}(t)=\|\alpha'(t)\|>0$ pour une immersion

donc s est croissante $s(a)=-L(\alpha,a,t_0)$ $s(b)=L(\alpha,b,t_0)$

$J=[-L(\alpha,a,t_0),L(\alpha,b,t_0)]$ s est une bijection de $[a,b]$

sur J etc ---- $\mathcal{T}(t)=\dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ verifie $\langle\mathcal{T},\mathcal{T}\rangle=1$

donc $2\langle\mathcal{T},\dfrac{d\mathcal{T}}{dt}\rangle=0$ donc $\dfrac{d\mathcal{T}}{dt}$ est $\perp$ à $\mathcal{T}$ etc ----

④

$$s'(t)=\sqrt{\alpha_1'^2(t)+\dots+\alpha_n'(t)^2} \text{ d'où}$$

$$s''(t)=\frac{2(\alpha_1'\alpha_1''+\dots+\alpha_n'\alpha_n'')}{2\sqrt{\quad}}=\frac{\langle\alpha',\alpha''\rangle}{\|\alpha'\|}$$

(iii) $\delta=\alpha\circ s^{-1}$ par construction vérifie $\|\delta'\|=1$ → on dérive % s abscisse curviligne

(iv) Comme $\langle\delta',\delta'\rangle=1$ en dérivant

$2\langle\delta',\delta''\rangle=0$ donc δ' et δ'' sont $\perp$

(v) $\delta(s)=\alpha\left(s^{-1}\left(\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(t)\|\,dt\right)\right)$ ou bien

$\delta(s(t))=\alpha(t)$ donc $\delta'(s(t))\,s'(t)=\alpha'(t)$

puis $\alpha''(t)=\delta''(s(t))(s'(t))^2+\delta'(s(t))\,s''(t)$

$$\text{donc } \delta''(s)=\frac{\alpha''-\frac{\langle\alpha',\alpha''\rangle\,\alpha'}{\|\alpha'\|^2}}{\|\alpha'\|^2}=\frac{\alpha''-\left\langle\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|},\alpha''\right\rangle\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}}{\|\alpha'\|^2}$$

et au numérateur on retire à α'' sa composante sur $\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$

d'où la formule du (vi)

(vii) si $\alpha(t)=(t,f(t),0)$ $\alpha'=(1,f',0)$ $\alpha''=(0,f'',0)$

$$\text{alors } \begin{pmatrix}1\\f'\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\f''\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\f''\end{pmatrix} \text{ donc } \frac{\|\alpha'\wedge\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}=\frac{f''(t)}{\left(\sqrt{1+f'^2(t)}\right)^3}$$

voire Exo 7 et cours

(viii) on applique bêtement $K = \dfrac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}$

même pour $x = \cos ay$ la courbure est invariante par symétrie % droite $y = x$ donc $K = \dfrac{a^2|\cos ay|}{(1+a^2\sin^2 ay)^{3/2}}$

Pour $y = ax$ la courbure est nulle !

Exo4 fait en cours   Exo5 fait en cours   Exo6 fait en cours   exo7 fait en cours   exo8 fait en cours   exo9

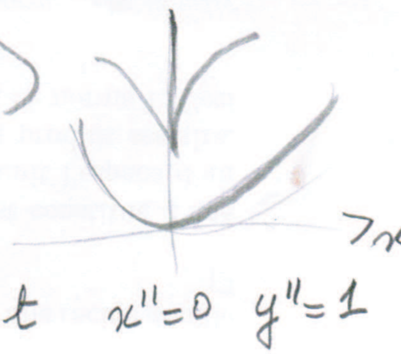
Exo10 $\alpha = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}\right)$ $K = \dfrac{1}{1+t^2+\frac{t^4}{4}}$ Torsion $= \dfrac{1}{1+t^2}$

Exo11
$\alpha = \left(t^3, (t+1)^3, 3t\right)$ $K =$

Exo12 $y = \frac{x^2}{2}$ développée $y = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ obtenue par $\begin{cases} x = -t^3 \\ y = 1 + \frac{3t^2}{2} \end{cases}$

$$O(t) = \left(x(t) - y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''},\ y + x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}\right)$$

à partir de $f(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$ en utilisant



Calculs explicites $x = t$ $y = \frac{t^2}{2}$ $x' = 1$ $y' = t$ $x'' = 0$ $y'' = 1$

donc $x'^2 + y'^2 = 1 + t^2$ et $x'y'' - y'x'' = 1$ donc

$$O(t) = \left(t - t\,\frac{1+t^2}{1},\ \frac{t^2}{2} + 1\,\frac{1+t^2}{1}\right) = \left(-t^3, 1 + 3\frac{t^2}{2}\right)$$

Exo13

$\overrightarrow{OM} = \rho u \qquad \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} u + \rho v \qquad u = (\cos\theta, \sin\theta)$
$v = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} u + 2\frac{d\rho}{d\theta} v - \rho u = \left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - \rho\right) u + 2\frac{d\rho}{d\theta}\vec{v}$$

donc $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2} = \begin{matrix}\rho' \\ \rho \\ 0\end{matrix} \wedge \begin{matrix}\rho''-\rho \\ 2\rho' \\ 0\end{matrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)\end{pmatrix} = \left(2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)\right) u \wedge v$

donc $\frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{|2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)|}{\left(\rho'^2 + \rho^2\right)^{3/2}}$ courbure non signée

et $\frac{2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)}{\left(\rho'^2 + \rho^2\right)^{3/2}}$ courbure signée -

Alors $\frac{\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}}{\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}\right\|} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} u + \frac{\rho}{\sqrt{\rho'^2+\rho^2}} v$

Rayon de courbure signé $= \frac{\left(\rho'^2+\rho^2\right)^{3/2}}{2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)}$ $\quad \theta$ centre de courbure

Alors $\overrightarrow{O\theta(\theta)} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M\theta} = \rho u + R n$

$$= \rho u + \frac{\left(\rho'^2+\rho^2\right)^{3/2}}{2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)} \left(\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} u + \frac{\rho}{\sqrt{\rho'^2+\rho^2}} v\right)$$

$$= \left(\rho + \frac{\rho'(\rho'^2+\rho^2)}{2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)}\right) u + \frac{\rho(\rho'^2+\rho^2)}{2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)} v$$

Pour $\rho = e^{a\theta} \qquad \rho' = a e^{a\theta} \qquad \rho'' = a^2 e^{a\theta} \qquad \rho'^2 + \rho^2 = (1+a^2) e^{2a\theta}$

$$2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho) = 2a^2 e^{2a\theta} - e^{a\theta}\left(a^2 e^{a\theta} - e^{a\theta}\right) = e^{2a\theta}\left(2a^2 - a^2 + 1\right)$$

donc $\frac{\rho'^2 + \rho^2}{2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)} = 1$

donc $\overrightarrow{O\Theta(\theta)} = \left(e^{a\theta} + a e^{a\theta}\right) u + e^{a\theta} v = e^{a\theta}\left((a+1)u+v\right)$ (7)

en complexe $i a e^{(a+i)\theta} = i a\, \alpha(\theta)$

et donc la developpée d'une spirale logarithmique est une autre spirale logarithmique deduite de la premiere par rotation de $\frac{\pi}{2}$ et homothetie de rapport a

<u>Exo 14</u> Courbure de la spirale $\rho(\theta) = \theta$

alors $\rho' = 1$ et $\rho'' = 0$ d'où $\dfrac{2\rho'^2 - \rho(\rho''-\rho)}{(\rho'^2+\rho^2)^{3/2}} = \dfrac{2\rho'^2+\rho^2}{(\rho'^2+\rho^2)^{3/2}}$

$= \dfrac{2+\theta^2}{(1+\theta^2)^{3/2}}$

crucial

<u>Exo 15</u> : $K(s) = \dfrac{1}{s}$ d'où $\theta'(s) = \dfrac{1}{s}$

à rotation près $\tau = e^{i(\ln s)}$ ou i lle la rotation ds $\mathbb{C}$

à une translation près $\alpha(s) = \int^{s} e^{i\ln u}\, du$ avec

$v = \ln u$ il vient $\alpha(s) = \int_{-\infty}^{\ln s} e^{(1+i)v}\, dv = \dfrac{-s e^{i\ln s}}{1+i}$

ce qui donne en coordonnées polaires $\theta = \ln s$ et $\rho(\theta) = a e^{\theta}$

à une rotation près donc une spirale logarithmique

Si on trouve cela merdique on le fait dans l'autre sens On parachute $\gamma(t) = (a e^{bt}\cos t, a e^{bt}\sin t)$

On montre que pour tout point p l'angle entre Op et la tangente en p est constant ce qui permet de dessiner la courbe. On calcule l'abscisse curviligne mesurée à partir du point $\gamma(-\infty)$. On calcule la courbure signée de cette courbe et on constate qu'elle est proportionnelle à l'inverse de l'abscisse curviligne.

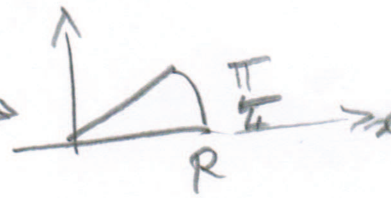
On rappelle le theoreme fondamental sur les courbes biregulieres. On enonce un theoreme analogue pour les courbes regulieres dans le plan dont la courbure algebrique est donnée et on sait que toutes les courbes regulieres de classe $\mathcal{C}^2$ dont la courbure algebrique est proportionnelle à l'inverse de l'abscisse curviligne sont des images par une isométrie du plan d'une courbe de la famille

$$\gamma(t) = (a e^{bt} \cos t, a e^{bt} \sin t)$$

Exo 16 $\alpha(t) = \left(\int_0^t \cos u^2 \, du, \int_0^t \sin u^2 \, du \right)$

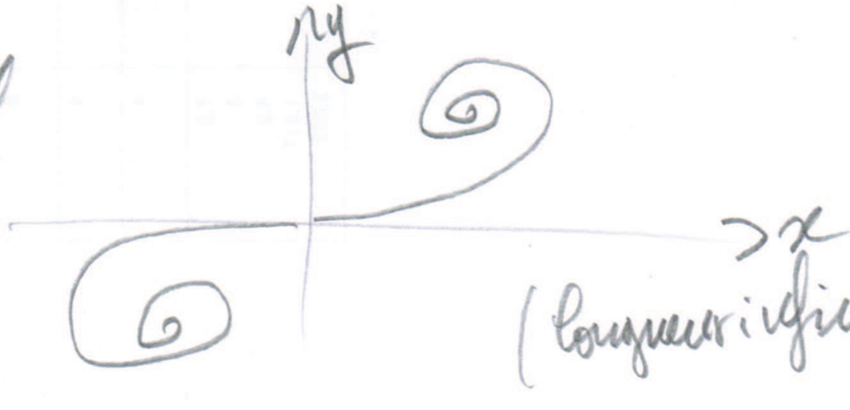
$\alpha' = (\cos t^2, \sin t^2)$ donc $t = s$

$\alpha'' = 2t\,(-\cos t^2, \cos t^2) = \frac{n}{R}$ donc $R = \frac{1}{2s}$ est monotone. Donc les "disques de courbures" (l'adhérence de l'"intérieur" des cercles osculateurs) forment une suite de compacts emboîtés dont le rayon tend vers 0 q/d $t \to \infty$. Donc il existe un seul point intersection de tous ces compacts. Donc $\int_0^\infty \cos u^2 \, du$ et $\int_0^\infty \sin u^2 \, du$ convergent. En intégrant e^{iz^2} sur



on obtient $\int_0^\infty \cos u^2 \, du = \int_0^\infty \sin u^2 \, du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Spirale de Fresnel



(longueur infinie)

Exo17 $\alpha(u) = (u - \sin u, 1 - \cos u)$

$$\alpha'(u) = (1 - \cos u, \sin u) \qquad \alpha''(u) = (\sin u, \cos u)$$

$$K(u) = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\cos u - 1}{(2(1-\cos u))^{3/2}}$$ d'où $R = 2^{3/2}(1-\cos u)^{1/2}$

$$\vec{n} = \frac{1}{(2(1-\cos u))^{1/2}}(-\sin u, 1-\cos u)$$ d'où

$$\Theta(u) = \alpha(u) + \frac{n}{K(u)} = (u - \sin u, 1 - \cos u) - 2(-\sin u, 1 - \cos u) = (u + \sin u, -1 + \cos u)$$

Qui est encore une cycloïde un cercle de rayon 1 roulant sur la droite $y = -2$ avec position en $(0,0)$ au départ.