Equations différentielles non linéaires

Etude qualitative

Exercice 1 [00430] [correction]
Soit
$$E : y' = x^2 + y^2$$
a) Justifier l'existence d'une unique solution maximale y de E vérifiant $y(0) = 0$.
b) Montrer que y est une fonction impaire.
c) Etudier la monotonie et la concavité de y.
d) Montrer que y est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
e) Dresser le tableau de variation de y.

Exercice 2 [00431] [correction]
a) Montrer que le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+xy} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
possède une solution maximale unique.
b) Montrer que celle-ci est impaire et strictement croissante.
c) Etablir enfin qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.
d) Déterminer la limite en $+\infty$ de cette solution.
e) On note φ la bijection réciproque de cette solution. Exprimer φ à l'aide d'une intégrale en formant une équation différentielle vérifiée par cette fonction.

Exercice 3 [00432] [correction]
On considère le problème différentiel :
$$\begin{cases} y' = \cos(xy) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
a) Justifier l'existence d'une unique solution maximale y.
b) En observant
$$y(x) = y_0 + \int_0^x \cos(ty(t))\,\mathrm{d}t$$
montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 [00434] [correction]
Justifier qu'il existe une solution maximale à l'équation différentielle
$$y' = x + y^2$$
vérifiant $y(0) = 0$ et que celle-ci est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 5 [00435] [correction]
On considère l'équation
$$E : y' = x + y^2$$
a) Quel est le lieu des points où les solutions de (E) présentent une tangente horizontale ?
b) Décrire le lieu des points d'inflexion ?

Exercice 6 [00437] [correction]
On considère l'équation différentielle
$$E : xy' = x + y^2 \text{ sur }]0, +\infty[$$
a) Montrer que les solutions sont définies sur des intervalles bornés de $\mathbb{R}^{+\star}$.
b) Etudier le comportement d'une solution maximale aux bornes de son intervalle de définition.

Exercice 7 Centrale MP [02456] [correction]
On note f la solution maximale de
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-xy}$$
telle que $f(0) = 0$.
a) Montrer que f est impaire.
b) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que f possède une limite finie a en $+\infty$.
d) Montrer que $a > 1$.
e) Montrer qu'en $+\infty$:
$$f(x) = a - \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax} + o\left(\mathrm{e}^{-ax}\right)$$

Exercice 8 Centrale MP [02457] [correction]
Soit $\lambda \in \left]-1,1\right[$. On s'intéresse à l'équation différentielle avec retard :

$$(\mathcal{E}) : f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$$

L'inconnue est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a) Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
b) Expliciter les solutions de $(\mathcal{E})$.
c) Montrer que $\prod_{k=0}^{n}(1+\lambda^k)$ tend vers une limite finie, non nulle, notée $K(\lambda)$ quand n tend vers ∞.
d) Montrer que, f étant une solution non nulle de $(\mathcal{E})$,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} K(\lambda)f(0)\mathrm{e}^x$$

Exercice 9 Centrale MP [02458] [correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note P_α le problème

$$x' = \cos(x^2 + \sin(2\pi t)) - a \text{ et } x(0) = \alpha$$

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une solution maximale x_α de P_α.
b) Que dire des intervalles de définition des solutions maximales ?
c) Pour $|a| > 1$, donner les variations et les limites aux bornes des solutions.
On suppose $|a| < 1$.
d) Montrer que, pour tout $A > 0$, il existe $M(A) > 0$ tel que pour tout $\alpha \in [-A, A]$ et tout $t \in [0,1]$, $|x_\alpha(t)| \leqslant M(A)$.
e) Montrer que, pour tout $(\alpha,\beta) \in [-A,A]^2$ et tout $t \in [0,1]$:

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leqslant |\alpha-\beta| + 2M(A)\int_0^t |x_\alpha(u) - x_\beta(u)|\,\mathrm{d}u$$

f) En déduire :

$$\forall t \in [0,1]\,, |x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leqslant |\alpha-\beta|\,\mathrm{e}^{2M(A)t}$$

Exercice 10 Mines-Ponts MP [02899] [correction]
Soit une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et bornée.
Soit y une solution maximale de l'équation différentielle

$$y' = \varphi(x,y)$$

Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 X MP [02979] [correction]
On considère l'équation

$$y' = x + y^2$$

Soit y une solution maximale définie sur un intervalle I.
a) Montrer que I est majoré. On pose $b = \sup I$.
b) Montrer que y est croissante au voisinage de b. Quelle est la limite de y en b ?
c) Trouver un équivalent de y au voisinage de b.

Exercice 12 [03344] [correction]
On étudie l'équation différentielle

$$(E) : y' = x^3 + y^3$$

Soit y une solution maximale de l'équation différentielle (E) définie en 0 et vérifiant $y(0) > 0$.
a) Justifier que y est définie sur un intervalle ouvert $\left]\alpha,\beta\right[$.
b) Montrer que y est croissante sur $\left[0,\beta\right[$.
c) Etablir que β est réel.
d) Déterminer la limite de y en β^-.

Exercice 13 [03503] [correction]
Soit f la solution maximale sur $\left]\alpha,\beta\right[$ du problème de Cauchy

$$y' = x + \frac{1}{y} \text{ avec } y(0) = a > 0$$

Montrer que $\beta = +\infty$.

Résolution d'équations non linéaires

Exercice 14 [00438] [correction]
Déterminer les solutions ne s'annulant pas de l'équation différentielle

$$y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$$

On pourra réaliser le changement de fonction inconnue $z = \sqrt{y}$.

Exercice 15 [00439] [correction]
Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$$

Exercice 16 [00440] [correction]
a) Résoudre sur tout intervalle

$$y' + \mathrm{e}^{x-y} = 0$$

b) Préciser les solutions maximales.

Exercice 17 [00441] [correction]
a) Résoudre sur tout intervalle

$$xy' - (y^2 + 1) = 0$$

b) Préciser les solutions maximales.

Exercice 18 [00442] [correction]
a) Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$E : y' = 2x(1 + y^2)$$

b) Préciser les solutions maximales

Exercice 19 [00443] [correction]
a) Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$yy' - y' = \mathrm{e}^x$$

b) Préciser les solutions maximales.

Exercice 20 [00444] [correction]
Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$yy' = x$$

Exercice 21 Mines-Ponts MP [02898] [correction]
Déterminer les solutions de

$$yy'' = 1 + y'^2$$

Exercice 22 X MP [03069] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$$

Exercice 23 X MP [03085] [correction]
Résoudre, pour $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Equations autonomes

Exercice 24 [00445] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y' = 1 + y^2$$

Exercice 25 [00446] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y' = y^2$$

Exercice 26 [00447] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y' = y(y - 1)$$

Exercice 27 [00448] [correction]
Résoudre sur tout intervalle

$$y' + \mathrm{e}^y = 0$$

Exercice 28 [00449] [correction]
Résoudre sur tout intervalle
$$y' \sin y = -1$$

Exercice 29 [00450] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y' = |y|$$

Exercice 30 Centrale MP [03055] [correction]
On considère l'équation différentielle
$$E : y' = y^2 + y + 1$$
a) Existe-t-il des solutions de E sur $\mathbb{R}$?
b) Résoudre E, trouver ses solutions maximales et montrer qu'elles sont définies sur un intervalle borné dont on déterminera la longueur.

Exercice 31 [00451] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive et $x_0 \in \mathbb{R}$.
a) Soit F la primitive de $1/f$ s'annulant en x_0.
Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un certain intervalle ouvert I.
b) Etablir que F^{-1} est solution sur I de l'équation différentielle $x' = f(x)$ vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$.
c) Justifier que cette solution est maximale.

Exercice 32 [00452] [correction]
Déterminer les solutions au problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' = 2y + 2y^3 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 33 [00453] [correction]
On souhaite résoudre le problème de Cauchy formé par l'équation différentielle
$$y'' + |y| = 0$$
et les conditions initiales $y(0) = a$ et $y'(0) = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}$).
On admet que ce problème de Cauchy admet une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que pour tout réel x,
$$y(x) \leqslant a$$
b) Déterminer y lorsque $a \in \mathbb{R}^-$.
On suppose désormais $a > 0$.
c) Montrer que y s'annule en exactement deux points $b_- < 0$ et $b_+ > 0$ dont on précisera les valeurs.
d) Achever la résolution du problème de Cauchy.

Exercice 34 Centrale MP [03452] [correction]
a) Avec Maple, trouver la solution maximale du problème
$$x'(t) = ax(t)^2, x(0) = 1$$
pour $a \in \mathbb{R}$.
Vérifier et justifier le résultat obtenu, donner l'intervalle de définition.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$(E) : X'(t) = X(t)AX(t), X(0) = I_n$$
pour d'inconnue $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = O$ et que pour tout t dans l'intervalle de définition d'une solution$X$, $X(t)$ commute avec A.
Calculer X. Que vaut $X(t)^{-1}$?
c) On suppose que pour tout t dans l'intervalle de définition d'une solution X, $X(t)$ est inversible. L'application $t \mapsto X(t)^{-1}$ est-elle dérivable ? Quels sont ses coefficients ? Exprimer $X(t)$

Exercice 35 [03500] [correction]
Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation
$$y' = \sqrt{|y|}$$

Exercice 36 Mines-Ponts MP [02917] [correction]
Trouver l'image du cercle unité par $f : \mathbb{C} \backslash \left\{j, j^2\right\} \to \mathbb{C}$ définie par
$$f : z \to \frac{1}{1 + z + z^2}$$

Exercice 37 [03507] [correction]
Déterminer les fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

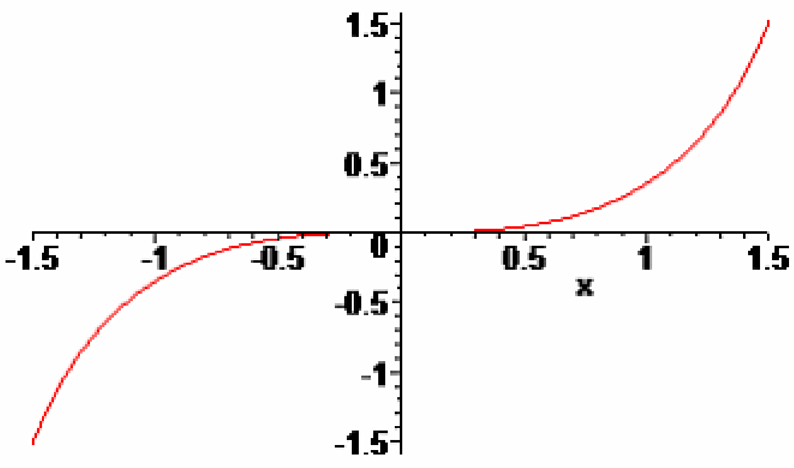
$$y'' = \sin(y), y(0) = \pi/2 \text{ et } y'(0) = \sqrt{2}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution maximale unique au problème de Cauchy posé, solution définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

```
dsolve({D(y)(x)=x^2+y(x)^2,y(0)=0},y(x));
plot(rhs(%),x=-1.5..1.5);
```



La solution de $y' = x^2 + y^2$ vérifiant $y(0) = 0$

b) Soit $z : x \mapsto -y(-x)$ définie sur I' symétrique de I par rapport à 0.
z est dérivable et est encore solution du problème de Cauchy précédent.
Donc $I' \subset I$ et $\forall x \in I', z(x) = y(x)$.
Or puisque I' est le symétrique de I, on observe $I' = I$ puis $z = y$.
c) $y'(x) \geqslant 0$ donc y est croissante, négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
y est deux fois dérivable et $y''(x) = 2x + 2y'(x)y(x) = 2x + 2(x^2 + y^2(x))y(x)$.
y'' est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$ d'où la concavité de y.
d) Par l'absurde, si y n'est pas définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$, c'est qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ (car elle est impaire). Mais alors $\forall x \geqslant 1, y'(x) \geqslant 1 + y^2(x)$ donc en intégrant, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant 1$, $\arctan y(x) \geqslant x + C$. Ceci est absurde.
e) y est définie, impaire, croissante sur $I = \left]-a, a\right[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Reste à étudier $\lim\limits_{x \to a-} y(x)$. Cette limite existe compte tenu de la monotonie de $y(x)$ et soit réelle, soit $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a-} y(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors posons $y(a) = \ell$. y est alors continue sur $\left]-a, a\right]$.
De plus $y'(x) \to a^2 + \ell^2 \in \mathbb{R}$ donc ce prolongement est $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-a, a\right]$ et vérifie l'équation différentielle en a.
Ceci est absurde car y est solution maximale.
Par suite $\lim\limits_{x \to a-} y(x) = +\infty$.

Exercice 2 : [énoncé]

a) $f(x, y) = \frac{1}{1+xy}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)/xy = -1\}$.
Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution maximale unique au problème de Cauchy posé. De plus celle-ci est définie sur un intervalle ouvert $\left]\alpha, \beta\right[$ avec $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}$, $\alpha < 0 < \beta$.
b) Considérons $z(x) = -y(-x)$ définie sur $\left]-\beta, -\alpha\right[$. Aisément on observe que z est solution du problème de Cauchy posé et est donc restriction de la solution maximale y. On en déduit $\left]-\beta, -\alpha\right[\subset \left]\alpha, \beta\right[$ donc $\alpha = -\beta$ et $y(-x) = -y(x)$ pour tout $x \in \left]-\beta, \beta\right[$.
Montrons que y est strictement croissante.
La fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$ et $y' = \frac{1}{1+xy}$ ne s'annule pas donc y est strictement monotone.
Puisque $y(0) = 0$, on a $y'(0) = 1$ et donc y est strictement croissante.
c) De ce qui précède découle que y est positive sur $\mathbb{R}^+$. Montrons que $\beta = +\infty$.
Par l'absurde supposons $\beta \in \mathbb{R}^{+\star}$.
Pour tout $x \in \left[0, \beta\right[$,

$$y(x) = \int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + ty(t)} \leqslant \int_0^x \mathrm{d}t \leqslant \beta$$

donc la fonction y est croissante et majorée, elle admet par conséquent une limite finie en β. Ceci permet de prolonger y en une solution sur $\left]-\beta, \beta\right]$ ce qui contredit la maximalité de y. On conclut que $\beta = +\infty$.
d) Puisque la solution y est croissante, elle admet une limite ℓ en $+\infty$ avec $\ell \in \mathbb{R}^{+\star} \cup \{+\infty\}$.
Par l'absurde supposons $\ell \in \mathbb{R}^{+\star}$.
On a

$$y(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + ty(t)}$$

Quand $t \to +\infty$

$$\frac{1}{1 + ty(t)} \sim \frac{1}{\ell t}$$

Par comparaison de fonctions positives, on peut affirmer la divergence de l'intégrale

$$\int_{[0,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{1+ty(t)}$$

puis, par intégration d'une fonction positive non intégrable

$$y(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+ty(t)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

e) Par ce qui précède, on peut affirmer que y est bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée ne s'annule pas. Sa bijection réciproque φ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée vérifie

$$\varphi'(x) = \frac{1}{y' \circ \varphi(x)} = 1 + \varphi(x)x$$

Après résolution de cette équation différentielle linéaire avec la condition initiale $\varphi(0) = 0$, on obtient

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3 : [énoncé]
a) $y' = f(x, y)$ avec $f(x, y) = \cos(xy)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution maximale unique définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.
b) $y(x) - y_0 = y(x) - y(0) = \int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos(ty(t))\,\mathrm{d}t$.
Supposons $b < +\infty$.
$\int_{[0,b[} \cos(ty(t))\mathrm{d}t$ est définie en tant qu'intégrale d'une fonction bornée sur un intervalle borné.
Quand $x \to b^-$, on a $y(x) \to y_0 + \int_0^b \cos(ty(t))\,\mathrm{d}t = \ell$.
Posons $y(b) = \ell$ de sorte de prolonger y par continuité.
Quand $x \to b^-$, $y'(x) \to \cos(bx) \in \mathbb{R}$ donc $y'(b) = \cos(b\ell) = \cos(by(b))$.
On obtient alors une solution de l'équation différentielle définie sur $]a, b]$.
Cela contredit la maximalité de y. Absurde.
Ainsi $b = +\infty$ et de même $a = -\infty$.

Exercice 4 : [énoncé]
L'équation différentielle est de la forme $y' = f(x, y)$ avec $f(x, y) = x + y^2$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Le Théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy posé.
Supposons que $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme solution du problème de Cauchy posé. On a $a_0 = 0$ et sur $]-R, R[$,
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = x + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n$.
Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence > 0 :
$a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1/2$ puis $\forall n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
Ces relations déterminent une suite (a_n) unique et de plus on observe $|a_n| \leqslant 1$ de sorte que la série entière $\sum a_n x^n$ définie par la suite (a_n) est de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et ainsi les calculs qui précèdent assurent que sa somme est effectivement solution du problème de Cauchy posé.

Exercice 5 : [énoncé]
a) Si une solution de E présente une tangente horizontal en un point d'abscisse x alors $y'(x) = 0$ et donc $x + y^2(x) = 0$. Un tel point figure sur la courbe d'équation $x + y^2 = 0$. Inversement, pour un point de cette courbe, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution passant par ce point, solution qui présentera évidemment une tangente horizontale en celui-ci.
b) Par récurrence, une solution de E est une fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $y'' = 1 + 2yy' = 1 + 2y(x + y^2)$. Un point d'inflexion d'une solution de E figure alors obligatoirement sur la courbe d'équation $1 + 2y(x + y^2) = 0$. Inversement, pour un point de cette courbe il existe une unique solution de E passant par ce point et cette solution y vérifie $y''(x) = 0$ ainsi que
$y^{(3)}(x) = 2(x + y^2)^2 + 2y(1 + 2y(x + y^2)) = 2(x + y^2)^2 \neq 0$. La courbe présente donc une inflexion en ce point.

Exercice 6 : [énoncé]
a) Soit y une solution maximale de E définie sur un intervalle $I \subset]0, +\infty[$.
Soit $a \in I$, pour $x \geqslant a$, $\frac{y'(x)}{a+y^2(x)} \geqslant \frac{1}{x}$ donc $\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{y(x)}{\sqrt{a}} \geqslant \ln x + C$ sur I. Puisque la fonction arctan est bornée, l'intervalle I l'est aussi.
b) Notons $\alpha < \beta$ les extrémités de I. $I =]\alpha, \beta[$.
La fonction y est croissante sur I.
La fonction y ne peut converger en β^- car sinon on pourrait prolonger y en une solution de E sur $]\alpha, \beta]$ ce qui contredirait la maximalité de y. Par suite y croît vers $+\infty$ en β^-.
Si $\alpha > 0$, pour les mêmes raisons que ci-dessus, y ne peut converger en α^+ et donc y tend vers $-\infty$ en α^+.
Si $\alpha = 0$. Puisque $\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{y(a)} = \int_x^a \frac{\mathrm{d}t}{y^2(t)} + \ln \frac{a}{x}$.
Par la monotonie de y, nous sommes assurés de l'existence d'une limite en 0^+.

Si y ne tend pas vers 0 en 0^+ alors $\int_{]0,a]} \frac{\mathrm{d}t}{y^2(t)}$ converge et l'identité précédente donne une absurdité quand $x \to 0^+$.
Ainsi y converge vers 0 en 0^+.

Exercice 7 : [énoncé]
a) On introduit $g : x \mapsto -f(-x)$ et on observe que g est solution du problème de Cauchy caractérisant la solution maximale f, g est donc une restriction de f et cela permet d'affirmer l'imparité de f.
b) Supposons f définie sur $]-b, b[$ avec $b \in \mathbb{R}^{+\star}$
$f'(x) \geqslant 0$, f est croissante donc positive sur $[0, b[$.

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$$

Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-tf(t)}$ est bornée donc intégrable sur $[0, b[$. f admet donc une limite finie en b et cela permet de prolonger f en une solution sur $[0, b]$ ce qui contredit la maximalité de f.
c)

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$$

avec $t^2\mathrm{e}^{-tf(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car f est strictement croissante et positive. Par suite f converge en $+\infty$ vers

$$a = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$$

d) Par croissance, $f(x) \leqslant a$ donc $a \geqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ ce qui donne $a^2 \geqslant 1$ puis $a \geqslant 1$.
De plus, il y a égalité si, et seulement si, $f(t) = a$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ ce qui est exclu puisque $f(0) = 0$.
e) Commençons par observer :

$$0 \leqslant x(a - f(x)) \leqslant x\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$$

Or $t^3\mathrm{e}^{-tf(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Ainsi $x(a - f(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Ensuite

$$a - f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-tf(t)}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-t(f(t)-a)}\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour x assez grand :

$$\forall t \geqslant x : 1 - \varepsilon \leqslant \mathrm{e}^{-t(f(t)-a)} \leqslant 1$$

donc

$$\frac{1-\varepsilon}{a}\mathrm{e}^{-ax} \leqslant a - f(x) \leqslant \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}$$

d'où la relation proposée.

Exercice 8 : [énoncé]
a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en montrant par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $a > 0$, on peut introduire $M_a = \|f\|_{\infty,[-a,a]}$.
Comme

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$$

une récurrence facile donne

$$\left\|f^{(n)}(x)\right\| \leqslant 2^n M_a$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\forall x \in [-a, a]\,, \left|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{(2\,|x|)^{n+1}M_a}{(n+1)!} \to 0$$

Ainsi, f est égale à la somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$ et est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
b) Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ où une récurrence facile donne

$$f^{(n)}(0) = f(0)\prod_{k=0}^{n-1}(1 + \lambda^k)$$

c) Posons $u_n(\lambda) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(1 + \lambda^k)$. On a

$$\ln(u_n(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1}\ln(1 + \lambda^k)$$

avec $\ln(1 + \lambda^k) \sim \lambda^k$ terme général d'une série absolument convergente donc la suite $(\ln(u_n(\lambda)))$ converge puis la suite $(u_n(\lambda))$ converge vers $K(\lambda) > 0$.
d) On a

$$f(x) - K(\lambda)f(0)\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n(\lambda) - K(\lambda)}{n!}f(0)x^n$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang N au-delà duquel :

$$|u_n(\lambda) - K(\lambda)| \leqslant \varepsilon K(\lambda)$$

On a alors

$$f(x) - K(\lambda)f(0)\mathrm{e}^x = P(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{u_n(\lambda) - K(\lambda)}{n!} f(0)x^n$$

avec le terme polynomial

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{u_n(\lambda) - K(\lambda)}{n!} f(0)x^n$$

Pour x assez grand

$$|P(x)| \leqslant \varepsilon K(\lambda)\,|f(0)|\,\mathrm{e}^x$$

et donc

$$|f(x) - K(\lambda)f(0)\mathrm{e}^x| \leqslant 2\varepsilon K(\lambda)\,|f(0)|\,\mathrm{e}^x$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 9 : [énoncé]

a) On peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

b) Les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ car si une solution maximale est définie sur $]a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ alors la relation

$$x(t) = \alpha + \int_0^t \cos(x^2(u) + \sin(2\pi u)) - a\,\mathrm{d}u$$

permet de prolonger x par continuité en b car $u \mapsto \cos(x^2(u) + \sin(2\pi u)) - a$ est intégrable sur $[0, b[$ puisque bornée. Par limite de la dérivée, on peut montrer que ce prolongement est solution sur $]a, b]$ ce qui contredirait sa maximalité. Ainsi $b = +\infty$ et de même $a = -\infty$.

c) Si $a > 1$ alors $x'(t) \leqslant 1 - a \leqslant 0$. x est décroissante et puisque $x(t) = \alpha + \int_0^t x'(u)\,\mathrm{d}u$, l'inégalité précédente permet d'obtenir les limites de x en $+\infty$ et $-\infty$. Ainsi

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	α	$\searrow$	$-\infty$

.

d) Pour $t \in [0, 1]$,

$$x_\alpha(t) = \alpha + \int_0^t \cos(x_\alpha^2(u) + \sin(2\pi u)) - a\,\mathrm{d}u$$

donne

$$|x_\alpha(t)| \leqslant |\alpha| + 2 \leqslant M(A) \text{ avec } M(A) = A + 2$$

e) En exploitant $|\cos u - \cos v| \leqslant |u - v|$,

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| = |\alpha - \beta| + \int_0^t \left|x_\alpha^2(u) - x_\beta^2(u)\right|\,\mathrm{d}u$$

puis

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leqslant |\alpha - \beta| + 2M(A)\int_0^t |x_\alpha(u) - x_\beta(u)|\,\mathrm{d}u$$

car

$$|x_\alpha(t) + x_\beta(t)| \leqslant 2M(A)$$

f) Posons $g(t) = \int_0^t |x_\alpha(u) - x_\beta(u)|\,\mathrm{d}u$.
L'inégalité précédente donne

$$\left(g(t)\mathrm{e}^{-2M(A)t}\right)' \leqslant |\alpha - \beta|\,\mathrm{e}^{-2M(A)t}$$

En intégrant

$$g(t)\mathrm{e}^{-2M(A)t} \leqslant \frac{|\alpha - \beta|}{2M(A)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2M(A)t}\right)$$

En réinjectant dans l'inégalité de départ :

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leqslant |\alpha - \beta| + |\alpha - \beta|\left(\mathrm{e}^{2M(A)t} - 1\right) = |\alpha - \beta|\,\mathrm{e}^{2M(A)t}$$

Exercice 10 : [énoncé]

Soit I l'intervalle sur lequel est défini y et $a \in I$. On sait que cet intervalle est ouvert.
Supposons par l'absurde que I soit majoré. Notons $b \in \mathbb{R}$ son extrémité supérieure.
Pour $x \in [a, b[$,

$$y(x) = y(a) + \int_a^x \varphi(t, y(t))\mathrm{d}t$$

Or la fonction φ est bornée donc l'intégrale $\int_{[a,b[} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t$ converge. On peut donc prolonger y par continuité en b en une solution de l'équation différentielle sur $I \cup \{b\}$. Ceci contredit la maximalité de y.
De même, l'intervalle I n'est pas minoré et donc $I = \mathbb{R}$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Si I n'est pas majoré alors pour $x \geqslant 1$, $y' \geqslant 1 + y^2$ puis

$$\frac{y'(x)}{1+y^2(x)} \geqslant 1$$

En intégrant,

$$\arctan(y(x)) - \arctan(y(1)) \geqslant x - 1$$

ce qui est absurde car la fonction arctan est bornée.
b) Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on a

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t)\,\mathrm{d}t = y(a) + \frac{x^2 - a^2}{2} + \int_a^x y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Si l'intégrale $\int_{[a,b[} y^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on peut prolonger par continuité y en b en un solution de E ce qui contredit la maximalité de y.
Sinon, l'intégrale $\int_{[a,b[} y^2(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et puisque c'est l'intégrale d'une fonction positive,

$$\int_a^x y^2(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} +\infty$$

On en déduit que y tend vers $+\infty$ en b^- et en particulier $y'(x) = x + y^2(x)$ est positif au voisinage de b.
Cela résout le problème dans un ordre différent de celui qui était soumis. L'auteur de l'énoncé avait-il une démarche plus simple en tête ?
c) En intégrant

$$\frac{y'}{y^2} = 1 + \frac{x}{y^2}$$

on obtient

$$\int_x^b \frac{y'(t)}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t = b - x + \int_x^b \frac{t}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales engagées.
Or

$$\int_x^b \frac{y'(t)}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{y(x)}$$

et

$$\left|\int_x^b \frac{t\,\mathrm{d}t}{y^2(t)}\right| \leqslant \frac{1}{y^2(x)}\frac{1}{2}(b^2 - x^2) = o\left(\frac{1}{y(x)}\right)$$

donc

$$\frac{1}{y(x)} \sim b - x$$

puis

$$y(x) \sim \frac{1}{b-x}$$

Exercice 12 : [énoncé]
a) La fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et celui-ci assure que les solutions maximales sont définies sur un intervalle ouvert.
b) Supposons, qu'il existe $x \in [0, \beta[$ tel que $y'(x) < 0$.
Sachant $y'(0) = (y(0))^3 > 0$, la continuité de y' permet d'introduire

$$a = \inf\{x \in [0, \beta[\,, y'(x) = 0\}$$

et on vérifie $y'(a) = 0$ car a est la borne inférieure d'une partie fermée.
Par continuité de y', on a

$$\forall x \in [0, a]\,, y'(x) \geqslant 0$$

et donc y est croissante sur $[0, a]$ ce qui entraîne $y(a) \geqslant y(0) > 0$.
Or $y'(a) = 0$ donne $(y(a))^3 = -a^3 < 0$. C'est absurde.
On en déduit que

$$\forall x \in [0, \beta[\,, y'(x) \geqslant 0$$

et donc y est croissante sur $[0, \beta[$.
c) Par l'absurde, supposons $\beta = +\infty$. Pour $x \geqslant 1$, on a

$$y'(x) \geqslant 1 + (y(x))^3$$

et donc

$$\int_1^x \frac{y'(t)}{1 + (y(t))^3}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x \mathrm{d}t = x - 1$$

Or

$$\int_1^x \frac{y'(t)}{1 + (y(t))^3}\,\mathrm{d}t = \int_{y(1)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^3} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^3} < +\infty$$

C'est absurde.
On en déduit que $\beta \in \mathbb{R}$.
Puisque y est croissante sur $[0, \beta[$, la fonction y admet une limite ℓ en β dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Par l'absurde, supposons $\ell \in \mathbb{R}$.
On peut prolonger y en β en posant $y(\beta) = \ell$.
Par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut montrer que le prolongement de y est dérivable en β et est solution de l'équation différentielle sur $]\alpha, \beta]$. Ceci contredit la maximalité initiale de la fonction y, c'est absurde.
On en déduit que y tend vers $+\infty$ en β^-.

Exercice 13 : [énoncé]
Le problème de Cauchy posé possède bien une solution définie sur un intervalle ouvert car la fonction $(x,y)\mapsto x+1/y$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star$.
Cette solution ne peut pas s'annuler sur $[0,\beta[$ et donc, puisque $y(0)=a>0$, celle solution est strictement positive sur $[0,\beta[$. On en déduit $y'(x)>0$ sur $[0,\beta[$ et donc y est croissante sur $[0,\beta[$.
Supposons $\beta<+\infty$.
Pour tout $x\in[0,\beta[$

$$y(x)=y(0)+\int_0^x t+1/y(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t\mapsto t+1/y(t)$ est intégrable sur $[0,\beta[$ car positive et majorée par $\beta+1/a$. On en déduit que y converge en β^- vers une valeur strictement positive.
On peut donc prolonger y en β et ce prolongement est dérivable et solution de l'équation différentielle en β car

$$y'(x)=x+\frac{1}{y(x)}\xrightarrow[x\to\beta^-]{}\beta+\frac{1}{\lim\limits_{\beta^-}y}$$

Ceci contredit la maximalité de la solution y sur $]\alpha,\beta[$.
On peut conclure $\beta=+\infty$.

Exercice 14 : [énoncé]
Soit y une fonction à valeurs strictement positives, définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Posons $z(x)=\sqrt{y(x)}$, z est dérivable.
y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle

$$z'+z=\frac{1}{2}(x+1)$$

Après résolution, on obtient

$$z(x)=C\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x\text{ avec }C\in\mathbb{R}$$

On en déduit

$$y(x)=(\frac{1}{2}x+C\mathrm{e}^{-x})^2\text{ avec }C\in\mathbb{R}$$

Ainsi

$$\exists C\in\mathbb{R},\forall x\in I,\frac{1}{2}x+C\mathrm{e}^{-x}\neq 0\text{ et }y(x)=\left(\frac{1}{2}x+C\mathrm{e}^{-x}\right)^2\text{ sur }I$$

Inversement, de telles fonctions sont bien solutions

Exercice 15 : [énoncé]
Soit y une solution sur un intervalle I de $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$.
Pour des raisons d'existence $I\subset\mathbb{R}^{+\star}$ et sur I, $y(x)>0$.
Sur I, $xy'(x)-y(x)=y(x)\ln\frac{y(x)}{x}$ puis $\left(\frac{y(x)}{x}\right)'=\frac{y(x)}{x^2}\ln\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.
Posons $z(x)=y(x)/x$. On obtient $z'(x)=\frac{z(x)}{x}\ln(z(x))$ puis en posant $t(x)=\ln(z(x))$, $t'(x)=\frac{z'(x)}{z(x)}=\frac{1}{x}t(x)$.
Après résolution de cette équation linéaire $t(x)=Cx$ puis $y(x)=x\mathrm{e}^{Cx}$ avec $C\in\mathbb{R}$.
Réciproquement de telles fonctions sont solutions.

Exercice 16 : [énoncé]
a) Soit y une solution sur un intervalle I de $y'+\mathrm{e}^{x-y}=0$.
Sur I, $y'(x)\mathrm{e}^{y(x)}=-\mathrm{e}^x$ donc il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in I,\mathrm{e}^{y(x)}=-\mathrm{e}^x+C$$

Par suite

$$\forall x\in I,-\mathrm{e}^x+C>0\text{ et }y(x)=\ln(C-\mathrm{e}^x)$$

Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.
b) Etudions la condition

$$\forall x\in I,-\mathrm{e}^x+C>0$$

On a

$$-\mathrm{e}^x+C>0\Leftrightarrow\mathrm{e}^x<C$$

Cas $C\in\mathbb{R}^-$:
Il n'existe pas d'intervalle I non vide vérifiant

$$\forall x\in I,-\mathrm{e}^x+C>0$$

Cas $C\in\mathbb{R}^{+\star}$:
On a

$$-\mathrm{e}^x+C>0\Leftrightarrow x<\ln C$$

donc $I\subset\,]-\infty,\ln C[$.
Les solutions maximales cherchées sont les fonctions d'expression $y(x)=\ln(C-\mathrm{e}^x)$ définies sur $]-\infty,\ln C[$ pour $C>0$.

Exercice 17 : [énoncé]
a) Soit y une solution sur un intervalle I de $xy' - (y^2+1) = 0$.
L'intervalle I ne peut contenir 0 car l'équation $xy' - (y^2+1) = 0$ ne peut être satisfaite en $x = 0$.
Sur I, on a $\frac{y'(x)}{y^2(x)+1} = \frac{1}{x}$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \arctan(y(x)) = \ln|x| + C$$

Nécessairement

$$\forall x \in I, \ln|x| + C \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\text{ et } y(x) = \tan(\ln|x| + C)$$

Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.
b) Etudions la condition

$$\forall x \in I, \ln|x| + C \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$$

On a

$$-\frac{\pi}{2} < \ln|x| + C < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\pi/2-C} < |x| < \mathrm{e}^{\pi/2-C}$$

Ainsi

$$I \subset \left]-\mathrm{e}^{\pi/2-C}, -\mathrm{e}^{-\pi/2-C}\right[\text{ ou } I \subset \left]\mathrm{e}^{-\pi/2-C}, \mathrm{e}^{\pi/2-C}\right[$$

Les solutions maximales cherchées sont les fonctions d'expression $y(x) = \tan\ln(|x| + C)$ définies sur $\left]-\mathrm{e}^{\pi/2-C}, -\mathrm{e}^{-\pi/2-C}\right[$ ou sur $\left]\mathrm{e}^{-\pi/2-C}, \mathrm{e}^{\pi/2-C}\right[$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 : [énoncé]
a) Soit y une solution sur un intervalle I de E.
Pour tout $x \in I$, $\frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = 2x$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan y(x) = x^2 + C$.
Puisque pour tout $x \in I$, $\arctan y(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $x^2 + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et
$y(x) = \tan(x^2 + C)$
et $y(x) = \tan(x^2 + C)$.
Inversement de telles fonctions sont solutions.
b) Etudions la condition

$$\forall x \in I, x^2 + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

On a

$$-\frac{\pi}{2} < x^2 + C < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - C < x^2 < \frac{\pi}{2} - C$$

Cas $C \geqslant \pi/2$:
On a $\frac{\pi}{2} - C \leqslant 0$ donc il n'existe pas d'intervalle I non vide vérifiant

$$\forall x \in I, x^2 + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Cas $C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:
On a $\frac{\pi}{2} - C > 0$ et $-\frac{\pi}{2} - C < 0$ donc

$$-\frac{\pi}{2} < x^2 + C < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}$$

Par suite

$$I \subset \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2} - C}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}\right[$$

Cas $C \leqslant -\frac{\pi}{2}$:
On a $-\frac{\pi}{2} - C \geqslant 0$ donc

$$-\frac{\pi}{2} < x^2 + C < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{\pi}{2} - C} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}$$

Par suite

$$I \subset \left]\sqrt{-\frac{\pi}{2} - C}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}\right[\text{ ou } I \subset \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2} - C}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2} - C}\right[$$

Finalement, les solutions maximales cherchées sont les fonctions d'expression $y(x) = \tan(x^2 + C)$ définies sur $\left]-\sqrt{\frac{\pi}{2} - C}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}\right[$ pour $C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\sqrt{-\frac{\pi}{2} - C}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - C}\right[$ ou $\left]-\sqrt{\frac{\pi}{2} - C}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2} - C}\right[$ pour $C \leqslant -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 19 : [énoncé]
a) Soit y une solution sur I de l'équation $yy' - y' = \mathrm{e}^x$
On a $y'(x)(y(x) - 1) = \mathrm{e}^x$ sur I donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, (y(x) - 1)^2 = 2\mathrm{e}^x + C$$

Nécessairement

$$\forall x \in I, 2\mathrm{e}^x + C \geqslant 0 \text{ et } |y(x) - 1| = \sqrt{2\mathrm{e}^x + C}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{2\mathrm{e}^x + C}$ n'est susceptible de ne s'annuler qu'en une extrémité de I donc $x \mapsto y(x) - 1$ est de signe constant. Ainsi

$$\forall x \in I, y(x) = 1 + \sqrt{2\mathrm{e}^x + C} \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = 1 - \sqrt{2\mathrm{e}^x + C}$$

Inversement de telles fonctions sont bien solutions sous réserve d'être définies et dérivables sur I c'est-à-dire que $2\mathrm{e}^x + C > 0$ sur I.
b) Pour $C \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto 1 \pm \sqrt{2\mathrm{e}^x + C}$ est solution sur $\mathbb{R}$, c'est une solution maximale.
Pour $C < 0$, la condition

$$\forall x \in I, 2\mathrm{e}^x + C \geqslant 0$$

impose $x \geqslant -\ln(C/2)$ et donc $I \subset [-\ln(C/2), +\infty[$. Or la fonction considérée ne peut pas être dérivée en $-\ln(C/2)$ car le contenu de la racine carrée s'y annule sans que sa dérivée s'y annule... On en déduit qu'une solution maximale associée à cette constante C est définie sur $]-\ln(C/2), +\infty[$.

Exercice 20 : [énoncé]
Soit y solution sur un intervalle I de l'équation $yy' = x$.
Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que sur I,

$$\frac{1}{2}y^2(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

donc

$$|y(x)| = \sqrt{x^2 + 2C} \text{ avec } x^2 + 2C \geqslant 0$$

Cas $C > 0$ alors $|y(x)| = \sqrt{x^2 + 2C} \neq 0$ impose y de signe constante et donc

$$\forall x \in I, y(x) = \sqrt{x^2 + 2C} \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = -\sqrt{x^2 + 2C}$$

Cas $C < 0$ alors $x^2 + 2C \geqslant 0$ impose

$$I \subset \left]-\infty, \sqrt{-2C}\right] \text{ ou } I \subset \left[\sqrt{-2C}, +\infty\right[$$

Dans les deux cas y est de signe constant sur I et on parvient aux deux mêmes expressions qu'au dessus.
Cas $C = 0$ alors après un éventuel recollement en 0 (dans le cas où $0 \in I^\circ$) on parvient à

$$\forall x \in I, y(x) = x \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = -x$$

Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions sous réserve qu'elles soient dérivables ce qui impose $I \subset \left]-\infty, \sqrt{-2C}\right[$ ou $I \subset \left]\sqrt{-2C}, +\infty\right[$ dans le cas $C < 0$.

Exercice 21 : [énoncé]
Soit y une solution sur I. y ne s'annule pas ce qui permet d'écrire

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{y}$$

assurant que y est trois fois dérivable.
En dérivant $yy'' = 1 + y'^2$, on obtient $yy^{(3)} = y'y''$ d'où

$$\left(\frac{y''}{y}\right)' = 0$$

Ainsi il existe une constante λ vérifiant $y'' = \lambda y$.
De plus $yy'' = 1 + y'^2 > 0$ assure $\lambda > 0$.
Ainsi y est de la forme

$$y(x) = A\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)$$

Inversement, pour une telle fonction,

$$y(x)y''(x) - y'(x)^2 = \lambda\left(\left(A\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}x + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)\right)^2 - \left(A\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}x + B\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}x\right)^2\right) = \lambda\left(A^2 - B\right.$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont les

$$y(x) = A\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$|A| > |B| \text{ et } \lambda = \frac{1}{A^2 - B^2}$$

Exercice 22 : [énoncé]
On peut remarquer que la quantité $xy' - y$ est le numérateur de la dérivée de y/x.
Sur $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$, l'équation différentielle étudiée est équivalente à l'équation

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Posons $z(x) = y(x)/x$ et on est amené à résoudre

$$z' = \frac{1}{x}\sqrt{1 + z^2}$$

Cette équation à variables séparables équivaut à

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{1}{x}$$

Une fonction z en est solution sur $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\operatorname{argsh}(z(x)) = \ln x + \lambda$$

et nous obtenons pour solution générale

$$z(x) = \operatorname{sh}(\ln x + \lambda)$$

puis

$$y(x) = x\operatorname{sh}(\ln x + \lambda) = \frac{e^{2\lambda}x^2 - 1}{2e^{\lambda}}$$

qui a un sens sur $\mathbb{R}^{+\star}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sur $I \subset \mathbb{R}^{-\star}$, une étude semblable conduit à la solution générale

$$y(x) = x\operatorname{sh}(-\ln|x| + \mu) = \frac{x^2 - e^{2\mu}}{2e^{\mu}}$$

qui a un sens sur $\mathbb{R}^{-\star}$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.
Il reste à déterminer les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$.
Sachant que quand $x \to 0$,

$$\frac{e^{2\lambda}x^2 - 1}{2e^{\lambda}} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} + o(x) \text{ et } \frac{x^2 - e^{2\mu}}{2e^{\mu}} = -\frac{1}{2}e^{\mu} + o(x)$$

on peut raccorder par continuité une solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ définie à partir de λ et une solution sur $\mathbb{R}^{-\star}$ définie à partir de μ sous la condition $\mu = -\lambda$ et la fonction obtenue est alors dérivable en 0 et solution de l'équation différentielle étudiée.
Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation étudiée sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{e^{2\lambda}x^2 - 1}{2e^{\lambda}}$$

Exercice 23 : [énoncé]
Par la règle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$$

En factorisant

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right]$$

Soit y une solution de l'équation différentielle étudiée sur un intervalle I.
Par ce qui précède on a

$$y'' + y' + y = 0 \text{ ou } y'' = y' = y$$

l'alternative étant à comprendre valeurs par valeurs.
Montrons que cette alternative vaut en fait sur l'intervalle.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$(y'' + y' + y)(t_1) = 0 \text{ et } (y'' + y' + y)(t_2) \neq 0$$

Pour fixer les idées, supposons $t_1 < t_2$ et considérons

$$t_0 = \sup\left\{t \leqslant t_2 / (y'' + y' + y)(t) = 0\right\}$$

Par continuité on a

$$(y'' + y' + y)(t_0) = 0$$

et par construction, pour tout $t \in \left]t_0, t_2\right]$

$$(y'' + y' + y)(t) \neq 0$$

et donc

$$y''(t) = y'(t) = y(t)$$

La résolution sur l'intervalle $\left]t_0, t_2\right]$ de l'équation $y' = y$ donne

$$y(t) = \lambda e^t \text{ avec } \lambda \neq 0$$

et par passage à la limite quand $t \to t_0$ on obtient

$$(y'' + y' + y)(t_0) = 3\lambda e^{t_0} \neq 0$$

C'est absurde.
On en déduit que y est solution sur I de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ ou de l'équation $y'' = y' = y$
Après résolution, on en déduit

$$y(t) = e^{-t/2}\left[\lambda\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + \mu\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right] \text{ ou } y(t) = \lambda e^t$$

La réciproque est immédiate en remontant le calcul.

Exercice 24 : [énoncé]
Si y est solution sur I alors $\frac{y'}{1+y^2}=1$ donc

$$\exists C\in\mathbb{R},\forall x\in I,\arctan y(x)=x+C$$

Or $\arctan y(x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $x+C\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ puis $I\subset\left]-\frac{\pi}{2}-C,\frac{\pi}{2}-C\right[$ et

$$\forall x\in I,y(x)=\tan(x+C)$$

Réciproque est immédiate.

Exercice 25 : [énoncé]
L'équation est de la forme $y'=f(x,y)$ avec f fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut donc exploiter le théorème de Cauchy-Lipschitz.
$y=0$ est solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle. Il n'existe donc pas d'autre solution s'annulant.
Soit y une solution sur I ne s'annulant pas. On a $\frac{y'}{y^2}=1$ donc il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $-\frac{1}{y}=x+C$ et alors

$$\forall x\in I,x+C\neq 0\text{ et }y(x)=-\frac{1}{x+C}$$

La réciproque est immédiate.

Exercice 26 : [énoncé]
$y\mapsto y(y-1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz
Les fonctions constantes égales à 0 et 1 sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation. En vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, il n'y a pas d'autres solutions prenant les valeurs 0 et 1 que les solutions constantes.
Soit y une solution sur I non constante. On a

$$\forall x\in I,\frac{y'(x)}{y(x)(y(x)-1)}=1$$

Or $\int\frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}=\ln\left|1-\frac{1}{t}\right|+C^{te}$ donc

$$\exists C\in\mathbb{R},\forall x\in I,\ln\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right|=x+C$$

puis

$$\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right|=\mathrm{e}^{x+C}$$

La fonction $x\mapsto\frac{y(x)-1}{y(x)}$ étant de signe constant, on parvient à $\frac{y(x)-1}{y(x)}=\lambda\mathrm{e}^x$ avec $\lambda=\pm\mathrm{e}^C$ puis

$$y(x)=\frac{1}{1-\lambda\mathrm{e}^x}$$

avec $1-\lambda\mathrm{e}^x\neq 0$ sur I.
Inversement : ok.

Exercice 27 : [énoncé]
Soit y une solution sur un intervalle I de $y'+\mathrm{e}^y=0$.
Sur I, on a $-y'(x)\mathrm{e}^{-y(x)}=1$ donc $\exists C\in\mathbb{R},\forall x\in I,\mathrm{e}^{-y(x)}=x+C$.
Par suite $\forall x\in I,x+C>0$ et $y(x)=-\ln(x+C)$.
Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.

Exercice 28 : [énoncé]
Soit y une solution sur I de $y'\sin y=-1$.
Sur I, on a $-y'(x)\sin y(x)=1$ donc $\exists C\in\mathbb{R},\forall x\in I,\cos(y(x))=x+C$.
Si $y(x)=0\quad[\pi]$ alors l'équation $y'\sin y=-1$ ne peut être satisfaite en cet x.
Donc $\forall x\in I,\ y(x)\neq 0\quad[\pi]$.
Par continuité $\exists k\in\mathbb{Z},\forall x\in I,y(x)\in\left]k\pi,(k+1)\pi\right[$ et $\cos(y(x))=x+C$ donc
$y(x)=\begin{cases}\arccos(x+C)+k\pi\text{ si }k\text{ est pair}\\-\arccos(x+C)+(k+1)\pi\text{ si }k\text{ est impair}\end{cases}$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 29 : [énoncé]
Soit y une solution. C'est une fonction croissante.
Si elle est positive alors

$$\exists C>0,\forall x\in\mathbb{R},y(x)=C\mathrm{e}^x$$

Si elle est négative alors

$$\exists C>0,\forall x\in\mathbb{R},y(x)=-C\mathrm{e}^{-x}$$

Si elle s'annule en $a\in\mathbb{R}$ alors sur $\left]-\infty,a\right]$, $y'=-y$ et sur $\left[a,+\infty\right[$, $y'=y$.
Le recollement des deux solutions obtenues donne $y=0$.
Inversement : ok

Exercice 30 : [énoncé]
a) Soit y une solution de E définie sur un intervalle I.
Pour tout $a, b \in I$,

$$b - a = \int_a^b \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{y'(t)}{y^2(t) + y(t) + 1}\,\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut réaliser le changement de variable $u = y(t)$ et alors

$$b - a = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + u + 1} \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + u + 1} < +\infty$$

Les solutions de E sont donc définies sur des intervalles bornés ; il n'y a pas de solutions de E sur $\mathbb{R}$.
b) Soit y une solution de E définie sur un intervalle I non singulier.
Pour tout $t \in I$, on a

$$\frac{y'(t)}{y^2(t) + y(t) + 1} = 1$$

Or

$$\int \frac{y'(t)}{y^2(t) + y(t) + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2y(t) + 1}{\sqrt{3}}\right)$$

donc il existe une constante réelle C telle que pour tout $t \in I$,

$$\arctan\left(\frac{2y(t) + 1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(t + C)$$

Puisque la fonction arctan est à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$, on a pour tout $t \in I$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(t + C) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

et donc

$$I \subset \left]-\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right[- C$$

Enfin, pour tout $t \in I$,

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t + C)\right)$$

Résumons :
Si y est une solution de E sur un intervalle non singulier I, il existe une constante C réelle telle que

$$I \subset \left]-\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right[- C \text{ et } \forall t \in I, y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t + C)\right)$$

Inversement, en reprenant les calculs en sens inverse, on peut affirmer que de telles fonctions sont solutions.
Les solutions maximales sont alors les fonctions

$$y_C : \left]-\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right[- C \to \mathbb{R} \text{ avec } y_C(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t + C)\right)$$

Elles sont définies sur un intervalle ouvert de longueur $2\pi/\sqrt{3}$.

Exercice 31 : [énoncé]
a) F est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $I = F(\mathbb{R})$ intervalle ouvert dont les extrémités sont les limites de F aux extrémités de I.
b) On a $F(x_0) = 0$ donc $F^{-1}(0) = x_0$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$$

donc F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\left(F^{-1}(t)\right)' = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t))$$

Ainsi F^{-1} est solution de $x' = f(x)$.
c) Si I est majoré et que a désigne son extrémité droite alors $F^{-1}(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ car $F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} a$. Il n'est donc pas possible de prolonger F^{-1} en a. De même, pour une éventuelle extrémité gauche finie de I.

Exercice 32 : [énoncé]
Soit y une solution sur I intervalle contenant 0 du problème posé.
On a $y'y'' = 2y'y + 2y'y^3$ donc $\frac{1}{2}y'^2 = y^2 + \frac{1}{2}y^4 + C$ avec $C = \frac{1}{2}$ après évaluation en 0.
Ainsi $y'^2 = (1 + y^2)^2$ puis $\left(\frac{y'}{1+y^2}\right)^2 = 1$.
La fonction $\frac{y'}{1+y^2}$ étant continue sur I et prenant la valeur 1 en 0 on a :
$\frac{y'}{1+y^2} = 1$ d'où $\arctan y = x + C'$ puis $C' = 0$ après évaluation en 0.
Finalement $y = \tan x$ et $I \subset]-\pi/2, \pi/2[$. Réciproque immédiate.

Exercice 33 : [énoncé]
a) Puisque $y'' = -|y| \leqslant 0$ la fonction y' est décroissante. Sachant que $y'(0) = 0$, on en déduit le signe de y' puis les variations de y assurant un maximum en 0. Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \leqslant y(0) = a$$

b) Si $a \leqslant 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) \leqslant 0$ donc l'équation $y'' + |y| = 0$ devient $y'' - y = 0$.
La solution générale de cette équation est $y(t) = \lambda \text{ch} t + \mu \text{sh} t$.
Les conditions initiales donnent $\lambda = a$ et $\mu = 0$.
Au final, la solution cherchée est $y(t) = a\text{ch} t$.
c) Si la fonction y est de signe positif sur $\mathbb{R}^+$ alors l'équation $y'' + |y| = 0$ devient $y'' + y = 0$ et après résolution on parvient à l'expression $y(t) = a \cos t$. Cela contredit le signe constant de y.
On en déduit que y change de signe et donc que y s'annule sur $\mathbb{R}^+$.
Puisque y est décroissante et même strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, cette annulation est unique. On la note b^+. L'étude sur $\mathbb{R}^-$ est similaire et introduit b^-.
Puisque sur $[b^-, b^+]$, $y(t) \geqslant 0$, la résolution de l'équation $y'' + |y| = 0$ avec condition initiale donne $y(t) = a \cos t$ sur $[b^-, b^+]$. Puisque b^- et b^+ sont les premières annulations de y, on a $b^+ = \pi/2$ et $b^- = -\pi/2$.
d) Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, $y(t) = a \cos t$.
Puisque sur $[\pi/2, +\infty[$, $y(t) \leqslant 0$, l'expression de y est de la forme $y(t) = \lambda \text{ch} t + \mu \text{sh} t$.
Le raccord dérivable en $\pi/2$ donne

$$\begin{cases} \lambda \text{ch} \pi/2 + \mu \text{sh} \pi/2 = 0 \\ \lambda \text{sh} \pi/2 + \mu \text{ch} \pi/2 = -a \end{cases}, \begin{cases} \lambda = a\text{sh} \pi/2 \\ \mu = -a\text{ch} \pi/2 \end{cases}$$

Ainsi

$$\forall t \geqslant \pi/2, y(t) = a\text{sh} \frac{\pi}{2} \text{ch} t - a\text{ch} \frac{\pi}{2} \text{sh} t = a\text{sh} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

De même,

$$\forall t \leqslant -\pi/2, y(t) = a\text{sh} \left(\frac{\pi}{2} + t\right)$$

Exercice 34 : [énoncé]
a) La commande

```
dsolve({D(x)(t)=a*x(t)^2,x(0)=1},{x(t)});
```

donne

$$x(t) = \frac{1}{1 - at}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'applique à cette équation autonome, on peut affirmer qu'une solution de l'équation qui s'annule est la fonction nulle.
Puisqu'ici on cherche une solution ne s'annulant pas en 0, on peut affirmer qu'elle ne s'annule pas sur son intervalle de définition et donc

$$x'(t) = ax(t)^2 \text{ et } x(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)^2} = a \text{ et } x(0) = 1$$

La résolution se poursuit alors par intégration et donne

$$x(t) = \frac{1}{1 - at}$$

solution maximale sur $]-\infty, 1/a[$ quand $a \neq 0$ et sur $\mathbb{R}$ quand $a = 0$.
b) On montrer par récurrence que X est de classe $\mathcal{C}^n$ sur son intervalle de définition et

$$X^{(n)} = n! X(t)^{n+1} A^n$$

En particulier

$$X^{(k)} = O \text{ et } \forall 0 \leqslant j \leqslant k - 1, X^{(j)}(0) = j! A^j$$

On en déduit

$$X(t) = I_n + tA + t^2 A^2 + \cdots + t^{k-1} A^{k-1}$$

Puisque

$$(I_n - tA) X(t) = I_n - t^k A^k = I_n$$

on peut affirmer que $X(t)$ est inversible et

$$X(t)^{-1} = I_n - tA$$

c) Puisque X est dérivable et que les coefficients de X^{-1} sont des expressions rationnelles des coefficients de X, on peut affirmer que $t \mapsto X^{-1}(t)$ est dérivable.
Puisque

$$X(t) X^{-1}(t) = I_n$$

on obtient en dérivant

$$X'(t) X^{-1}(t) + X(t)(X^{-1}(t))' = O_n$$

Or X est solution de (E) donc $X'(t) = X(t) A X(t)$ puis on obtient

$$X(t) A + X(t)(X^{-1}(t))' = 0$$

On en déduit

$$\left(X^{-1}(t)\right)' = -A$$

puis

$$X^{-1}(t) = I_n - tA$$

et enfin

$$X(t) = (I_n - tA)^{-1}$$

Exercice 35 : [énoncé]
Soit y une fonction solution. La fonction y est croissante.
Supposons $y(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 1$$

et donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$2\sqrt{y(x)} = x + C$$

Cette affirmation est incompatible avec l'hypothèse de départ car $y(-C) = 0$.
De même $y(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est impossible.
On en déduit qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = 0$.
Posons alors

$$I = \{x \in \mathbb{R} / y(x) = 0\}$$

Par la croissance de y, on peut affirmer

$$a, b \in A \Rightarrow [a, b] \in A$$

et donc I est un intervalle. De plus, celui-ci est fermé car image réciproque d'un fermé par une fonction continue.
Supposons I majorée et posons $b = \max I$.
Pour tout $x > b$, on a $y(x) > 0$ et la reprise des calculs qui précèdent donne l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > b, y(x) = \left(\frac{x + C}{2}\right)^2$$

Or la fonction y étant continue en b, on a nécessairement $C = -b$ et finalement

$$\forall x > b, y(x) = \left(\frac{x - b}{2}\right)^2$$

Si l'on suppose I minorée, une étude analogue fournie

$$\forall x < 0, y(x) = -\left(\frac{a - x}{2}\right)^2 \text{ avec } a = \min I$$

Finalement la fonction y est de l'une des formes suivantes :
– y nulle ;
– y nulle sur $]-\infty, b]$ et égale à $x \mapsto (x - b)^2/2$ sur $]b, +\infty[$;
– y égale à $x \mapsto -(a - x)^2/2$ sur $]-\infty, a[$ et nulle sur $[a, +\infty[$;
– y égale à $x \mapsto -(a - x)^2/2$ sur $]-\infty, a[$, nulle sur $[a, b]$ et égale à $x \mapsto (x - b)^2/2$ sur $]b, +\infty[$.
Inversement les fonctions proposées sont solutions car notamment dérivable aux points de jonction des alternatives avec un nombre dérivé qui est nul.

Exercice 36 : [énoncé]
Pour $z \in U \setminus \{j, j^2\}$, on peut écrire $z = e^{i\theta}$, et on vérifie

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{1 + 2\cos\theta}$$

Les $f(z)$ parcourt donc la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{1}{1 + 2\cos(-\theta)}$$

soit encore

$$r = \frac{1}{1 + 2\cos(\theta)}$$

Il s'agit d'une hyperbole de foyer O, d'excentricité 2 et d'axe focal (Ox).

Exercice 37 : [énoncé]
Notons que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation étudiée car la fonction qui exprime le second membre est de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit y une solution sur I du problème différentiel posé.
On a $y'y'' = y' \sin(y)$ donc en intégrant

$$\frac{1}{2}y'^2 = C - \cos y$$

Les conditions initiales donnent $C = 1$ d'où

$$\frac{1}{2}y'^2 = 1 - \cos y = 2\sin^2\frac{y}{2}$$

Posons $z = y/2$ de sorte que

$$z'^2 = \sin^2 z$$

S'il existe $t_0 \in I$ tel que $\sin(z(t)) = 0$ alors

$$y(t_0) = 2k\pi \text{ et } y'(t_0) = 0$$

Puisque la fonction $t \mapsto 2k\pi$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' = \sin(y)$, c'est une solution maximale et y en est alors restriction. C'est absurde car $y(0) = \pi/2$.
On en déduit que pour tout $t \in I$, $\sin(z(t)) \neq 0$ et par un argument de continuité on obtient

$$\forall t \in I, z'(t) = \sin(z(t))$$

car $z'(0) > 0$ et $\sin(z(0)) > 0$.
On a alors sur I

$$\frac{z'}{\sin z} = 1$$

et puisque

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u} = \int \frac{\sin u}{1 - \cos^2 u}\,\mathrm{d}u = -\operatorname{argth}(\cos u)$$

on obtient

$$\operatorname{argth}(\cos z) = C - t$$

Les conditions initiales donnent

$$C = \operatorname{argth}(1/\sqrt{2})$$

et finalement

$$y(t) = 2\arccos\left(\operatorname{th}\left(C - t\right)\right)$$